MET 1180, forelesning 34, 8. feb. 2024, Runar Ile

1. Determinanter
2. Determinanter og lineære systemer. Cramers regel.

1. Determinanter

$A \rightsquigarrow \det(A) = |A|$ et tall

$n \times n$-matrise — kalles determinanten

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 4 = -5$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Hva sier determinanten om likningssystemet?

(1) $ax = b$

$\underline{a \neq 0}$: $x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b$ — én løsning

$\underline{a = 0}$: $0 \cdot x = b$

- $\underline{b \neq 0}$ — ingen løsninger
- $\underline{b = 0}$ — uendelig mange løsninger

(2) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + ay = 6 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (x kan være alle tall)

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Matriselikning:

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 6 \end{array}\right] \; -1\cdot$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right]$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

matrisemult.

$\det(A) \neq 0$ dvs $1\cdot a - 1\cdot 1 \neq 0$ dvs $a \neq 1$: entydig (én) løsn.

$\det(A) = 0$, dvs $a = 1$ ingen eller uendelig mange løsninger

$a = 1$: ingen løsninger

$a \neq 1$: én løsn.

$\begin{cases} x = 4 - \frac{2}{a-1} = \frac{4a-6}{a-1} \\ y = \frac{2}{a-1} \end{cases}$

Hva er det(A) hvis A er $(n \times n)$ og $n > 2$?

Metode 1 (kofaktorutvikling)

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

$+ 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

$+ 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 9 - 4 \cdot 4$

$-(1 \cdot 9 - 4 \cdot 1)$

$+ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1$

$= 2 - 5 + 2 = \underline{\underline{-1}}$

Kofaktorutvikling langs første rad

C_{ij} = kofaktor på plass (i, j) (rad i, kolonne j)

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Fortegn: ± 1

$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Minoren på (i,j)-plass = determinanten til matrisen vi får ved å fjerne rad i og kolonne j i A-matrisen

Utvikling langs første kolonne:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

$- 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

Utvikling langs andre rad:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

$- 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 + 16 - 12$

$= \underline{\underline{-1}}$

<u>Resultat</u>: Kofaktorutvikling langs enhver rad eller kolonne i en $n \times n$-matrise A gir samme tall, nemlig determinanten til A (skriver $\det(A)$, $|A|$).

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underbrace{- 0 \cdot \left| 3\times 3 \right| + 0 \cdot \left| 3\times 3 \right| - 0 \left| 3\times 3 \right|}_{=0}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \underbrace{- 0 \cdot |2\times 2| + 0 \cdot |2\times 2|}_{=0}$$

$$= \underline{\underline{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}} \underbrace{- 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 0}_{=0}$$

<u>Konklusjon</u>: Hvis A er <u>øvre</u> <u>triangulær</u> (bare 0-er under hoveddiagonalen) så er $\det(A)$ = produktet av tallene på hoveddiagonalen.

start: 11.08

Alternativ regnemetode : Gausseliminasjon

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \overset{-1\cdot}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \overset{-1\cdot}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{-3\cdot}{}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = C$$

Da er $\det(C) = 1\cdot 1\cdot(-1) = -1$

Resultat Hvis $A \sim B$ er en elementær radoperasjon, så har vi

i) Hvis vi bytter to rader : $|B| = -|A|$

ii) Hvis vi multipliserer en rad med et tall $c \neq 0$: $|B| = c\cdot|A|$

iii) Hvis vi legger et multiplum av rad til en annen rad : $|B| = |A|$.

2. Determinanter og lineære systemer. Cramers regel.

Et $(n\times n)$-system :

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{\underline{b}}$$

Matriselikning:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Fra determinanten til A kan vi si noe om løsningene

Resultat Et lineært $(n \times n)$-system med koeffisientmatrise A har:

én løsning $\iff \det(A) \neq 0$

$\left.\begin{array}{l}\text{ingen løsninger} \\ \text{eller} \\ \text{uendelig mange løsninger}\end{array}\right\} \iff \det(A) = 0$

Eks $\begin{cases} x + 2y - az = a - 1 \\ ax + 2y - z = 3 \\ x + (a+1)y - z = 3 \end{cases}$ (a er en parameter)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + a + 1 - 2(a \cdot (-1) - (-1) \cdot 1)$$
$$- a(a(a+1) - 2 \cdot 1) = -a^3 - a^2 + 5a - 3$$

$|A| = 0$ så er det ingen el. uendelig mange løsn.

dvs $-a^3 - a^2 + 5a - 3 = 0 \quad | \cdot -1$

$a^3 + a^2 - 5a + 3 = 0$ Gjetter på $\underline{a = 1}$ ..

polynomdiv: $(a-1) \cdot \underbrace{(a^2 + 2a - 3)}_{(a+3)(a-1)} = 0$

Konkl: $|A| = 0$ akkurat hvis $\underline{a = 1}$ el. $\underline{a = -3}$

$\underline{a=1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$ samme VS, forskj. HS – så $\underline{\text{ingen løsn.}}$

$\underline{a=-3}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \overset{+3\cdot,\ -1\cdot}{\sim} \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 8 & -9 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \end{array}\right] +\tfrac{1}{2}\cdot$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right]$ – så $\underline{\text{ingen løsning}}$

Hvis $|A| \neq 0$ (for $a \neq 1$, $a \neq -3$) finnes det akkurat én løsning. Det er formler (Cramers regel):

$\underline{b}$ to siste kolonnene i A

$$x = \frac{|A_x(\underline{b})|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 2 & -a \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix}}{-a^3-a^2+5a-3} = \text{(regner på teller)}$$

$\underline{b}$

$$y = \frac{|A_y(\underline{b})|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & -a \\ a & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-a^3-a^2+5a-3} = \ldots \text{regner på teller}$$

tilsv. for $z = \dfrac{|A_z(\underline{b})|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & a+1 & 3 \end{vmatrix}}{-a^3-a^2+5a-3}$

NB: Her må $|A| \neq 0$.