MET 1180, forelesning 36, 15. feb. 2024, Runar Ile

1. Rep: Vektorer
2. Matriser og matriseregning
3. Matrisemultiplikasjon
4. Transponering av matriser

1. Repetisjon: Vektorer

n-vektor : matrise med én kolonne med n tall

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

samme type vektor

addisjon/subtraksjon: $\underline{v} + \underline{w}$

skalarmultiplikasjon: $c \cdot \underline{v}$

tall

Lineærkombinasjon av vektorer (av samme type)

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$ er m n-vektorer

Da er $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \ldots + c_m \underline{u}_m$ en lin. komb.

av disse vektorene (her er $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tall)

Eks $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Da er

$$-\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

en lineærkomb. av $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ med $c_1 = -1$ og $c_2 = 3$

Omvendt: Vektorlikningen $x \cdot \underline{u}_1 + y \cdot \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$

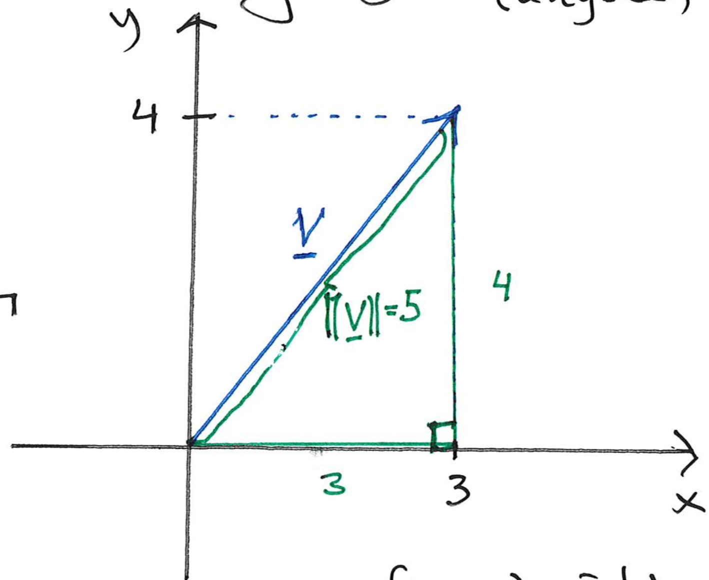
(dvs $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 5x - y = -8 \end{cases}$) har løsningen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

<u>Geometrisk representasjon</u>

En vektor er en $\overbrace{\text{retning og en størrelse}}^{\text{en forflytning}}$
(lengde)

<u>EKS</u>

2-vektorer: $\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

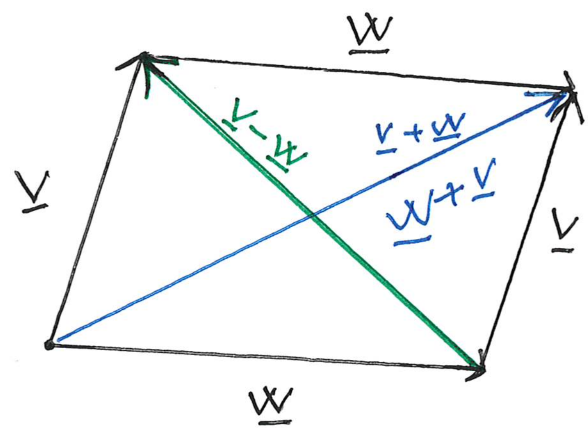


<u>Lengden</u> til $\underline{v}$ er

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

Retningen kan gis som en (eller flere) vinkler



$\underline{v} - \underline{w} =$

$-\underline{w} + \underline{v}$

Lengden av n-vektor $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ er

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

2. Matriser og matriseregning

En $(m \times n)$-matrise er en rektangulær tabell som har m rader $\equiv$ og n kolonner $||||$

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ } to rader — en (2×3)-matrise

tre kolonner

Regneoperasjoner

samme type!

i) Addisjon/subtraksjon $\quad A + B$

Eks: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+0 \\ 3+0 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ii) Skalarmultiplikasjon $\quad c \cdot A$

tall

Eks: $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$.

3. Matrisemultiplikasjon

Start: 11.00

A $\quad B$

$(m\times n)$ $\quad (n \times p)$

så antall kolonner i A = ant. rader i B. Da kan vi multiplisere: AB som blir en $(m\times p)$-matrise

Eks $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) \\ -5\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix}$

(2×2) $\quad (2\times 1)$ $\quad (2\times 1)$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ -5\cdot 1 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 0 \\ -5\cdot 3 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Eks

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 9 \\ -11 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

(2×2) $\quad (2\times 3)$

Eks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 7 - 1\cdot 0 & 3\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 21 & 3 \end{bmatrix}$$

(2×2) $\quad (2\times 2)$ $\quad (2\times 2)$

Eks

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1×3) $\quad (3\times 2)$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 3\cdot 2 & 2\cdot 3 - 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Merk 1) $AB \neq BA$

Eks

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2) „Alle" andre regneregler for tall gjelder også for matriser

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$$

$\vdots$

3) Identitetsmatrisene I:

En kvadratisk matrise med 1-ere på hoveddiagonalen og 0 ellers:

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1×1) $\quad (2\times 2)$ $\quad (3\times 3)$ $\quad (n\times n)$

I har følgende egenskap: $\begin{cases} I\cdot A = A \\ A\cdot I = A \end{cases}$

4) Diagonale matriser: 0-er bortsett fra på hoveddiagonalen

Eks: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

OBS!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Lineære likningssystemer på matriseform:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -1 \\ -x + 2y - 4z = 8 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}}_{A \; (2\times 3)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{(3\times 1)}^{=\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}}_{2\times 1}^{=\underline{b}}$$

– en matriselikn

Kort: $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ $\quad$ (tenk på $ax=b$)

4. Transponering

$$\underset{(m \times n)}{A} \rightsquigarrow \underset{(n \times m)}{A^T}$$

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2×3)

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (3 \times 2)$$

Sier A er symmetrisk hvis $A = A^T$.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ er symmetrisk

fordi $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$.

Viktig egenskap: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$