MET 1180, forelesning 38, 22. feb. 2024, Runar Ile

1. Inverser til matriser
2. Å finne den inverse matrisen ved hjelp av kofaktorer
3. Inversen ved gaussing.

1. Inverser til matriser

bytter fortegn

Eks (oppg. fra tirs) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Vil finne A^{-1}.

Prøver med $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Sjekker

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 2\cdot(-5) & 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 5\cdot 4 + 4\cdot(-5) & 5\cdot(-2) + 4\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ hmm, nesten. Setter $C = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

Da vil $AC = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, også: $CA = I$

Altså er $A^{-1} = C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}$

Anvendelse

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x + 4y = 22 \end{cases}$$

på matriseform

$$A^{-1}\cdot \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 22 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

tenk: $ax = b$ f.eks $5x = 30$

Multipliserer med a^{-1} ($5^{-1} = \frac{1}{5}$) på begge sider

$a^{-1}\cdot ax = a^{-1}b$ ($5^{-1}5x = 5^{-1}\cdot 30$)

$\frac{a}{a}\cdot x = \frac{b}{a}$ $\quad 1\cdot x = \frac{30}{5}$

$1\cdot x = \frac{b}{a}$ $\quad x = 6$

$x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I} \cdot \underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 22 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4\cdot 12 - 2\cdot 22 \\ -5\cdot 12 + 3\cdot 22 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

betyr $\underline{\underline{x = 2}}$ og $\underline{\underline{y = 3}}$

Resultat A $(n \times n)$

A invertibel (dvs at A har en invers A^{-1})

$\Updownarrow$

$\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Det lineære systemet $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ har entydig løsning

(og løsningen er $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

Spesielt : Hvis $\underset{(n\times n)\cdot(n\times n)}{A\,B} = \underset{(n\times n)}{I}$ vil

$\det(AB) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n} = 1$

A^{-1}!

dvs $\det(A) \cdot \det(B) = 1$

så $\det(A) \neq 0$ og A er invertibel (resultatet)

så $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot I$

dvs $I \cdot B = A^{-1}$

dvs $\underline{B = A^{-1}}$. (så $BA = I$ også)

Konkl : Hvis $AB = I$, så er $B = A^{-1}$.

Oppg a) skriv likningssystemet $\begin{cases} x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$

på matriseform: $A\underline{x} = \underline{b}$.

b) Finn A^{-1} og bruk A^{-1} til å løse systemet.

Løsning a) Koeffisientmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \end{bmatrix}$

Matriseformen: $A\underline{x} = \underline{b}$ dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \end{bmatrix} \quad (*)$$

b) For å finne A^{-1} prøver jeg med $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

og regner $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-3)+3\cdot 1 \\ 2\cdot 5 + 5(-2) & 2\cdot(-3)+5\cdot 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ - nesten...

Setter $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}}$

Da vil $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ganger $(*)$

med A^{-1} fra venstre:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot 16 + 3\cdot 25 \\ 2\cdot 16 - 1\cdot 25 \end{bmatrix}$$

så $\underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}}}$

Start: 11.04

2. Den inverse matrisen ved hjelp av kofaktorer

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ med $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Da er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{fordi}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} ad+b(-c) & a(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c(-b)+da \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I .$$

Generell formel: Hvis A er $(n \times n)$ med $\det(A) \neq 0$

er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{T}}_{\text{den adjungerte matrisen til } A}$$

transponere

kofaktorer

C_{ij} = kofaktor på $(i\,j)$-plass,

Notasjon: $\mathrm{adj}(A)$.

dvs $(-1)^{i+j} \cdot$ determinanten til matrisen hvor rad i og kolonne j i A er tatt vekk.

__Eks__ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Da er $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Så formelen gir $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\det} \cdot \mathrm{adj}(A)$

Oppg $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

a) Beregn adj(A) og det(A).
Skriv opp A^{-1}.

b) Bruk A^{-1} til å løse likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10z = 3 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

Løsning

a) $C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6$ $\quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5$ $\quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -15$ $\quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8$ $\quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$C_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$ $\quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

så $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -15 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & -15 & 0 \\ -5 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}}$

og $\det(A) = 2 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{21} + 1 \cdot C_{31}$
$= 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-15) + 1 \cdot 0 = \underline{\underline{-3}}$

og $\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 6 & -15 & 0 \\ -5 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}}$

b) $$\underline{x} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -15 & 0 \\ -5 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6\cdot 3 - 15\cdot 3 + 0\cdot 3 \\ -5\cdot 3 + 8\cdot 3 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 3 - 1\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -9\cdot 3 \\ 5\cdot 3 \\ -1\cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

3. Inversen ved gaussing (og jordan)

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, setter I ved siden av:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] -2\cdot \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] -2\cdot$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Prøv dette på den forrige oppgaven (3x3)