MET 1180, forelesning 39, 27. feb. 2024, Runar Ile

1. Oppsummering av lineær algebra.
2. Funksjoner i to variabler
   - Uttrykk
   - Definisjonsområdet
   - Graf
   - Nivåkurver

---

1. Oppsummering av lineær algebra.

Systemer av lineære likninger (på std. form!)

$\downarrow$

utvidet koeffisientmatrise $[A \vdots \underline{b}]$

$\downarrow$ radoperasjoner

Trappeform, pivoter

$\downarrow$

Enklere likningssystem

Varianter (skrivemåter):

Vektorlikninger : $x \cdot \underline{u} + y \cdot \underline{v} = \underline{b}$

(hvis det finnes løsn. er $\underline{b}$ en lineær kombinasjon av $\underline{u}$ og $\underline{v}$).

matrisemult.

Matriselikning : $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Determinanter til kvadratiske matriser

- forteller om antall løsninger

(det(A) $\neq 0$: én (entydig, unik) løsning
det(A) $= 0$: enten ingen, eller uendelig mange)

Beregning av det(A)

kofaktorutvikling
(langs en rad el. kolonne)

f.eks. $\det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \ldots$

radoperasjoner (gauss)
til trappeform

$A \sim \ldots \sim \underset{\text{trappeform (øvre triangulær)}}{B}$

(vet hvordan determinanten endrer seg)

$\det(B) =$ produktet av tallene på hoveddiag.

Cramers regel

(finner løsningene med determinanter)

f.eks. $x = \dfrac{\det(A_x(\underline{b}))}{\det(A)}$ osv.

Inverser til matriser

$(A \overset{\text{matrisemult.}}{\cdot} A^{-1} = I)$

Hvis A kvadratisk (må være def) og $\det(A) \neq 0$ så finnes A^{-1}. Da gir inversen løsningene på likningssystemet slik:

$$\underline{x} = A^{-1} \overset{\text{matrisemult.}}{\cdot} \underline{b}$$

Beregne A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \underbrace{\operatorname{adj}(A)}_{[C_{ij}]^T}$$

transponering

alle kofaktorene

gauss-jordan på

$[A \,\vdots\, I] \sim \ldots \sim [I \,\vdots\, B]$

og $B = A^{-1}$.

Matrisealgebra og regneregler

$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ osv.

NB: AB er vanligvis ikke lik BA

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

mult. av to matriser

mult. av to tall

F. eks. $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1})$ dvs $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

så $\det(A) = 3$ gir $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{3}$ osv.

---

2. Funksjoner i to variabler

En funksjon i to variabler er en regel som til hvert par av tall i definisjonsområdet gir et tall. Definisjonsområdet er en del av xy-planet.

Eks $f(x,y) = x + y - 2$ med definisjonsområdet

$2 \leq x \leq 5$ og $2 \leq y \leq 4$

" x ligger mellom 2 og 5 "

" y ligger mellom 2 og 4 "

F. eks. er $(4,3)$ i definisjonsområdet.

Oppg Hvilke punkter ligger i definisjonsområdet?

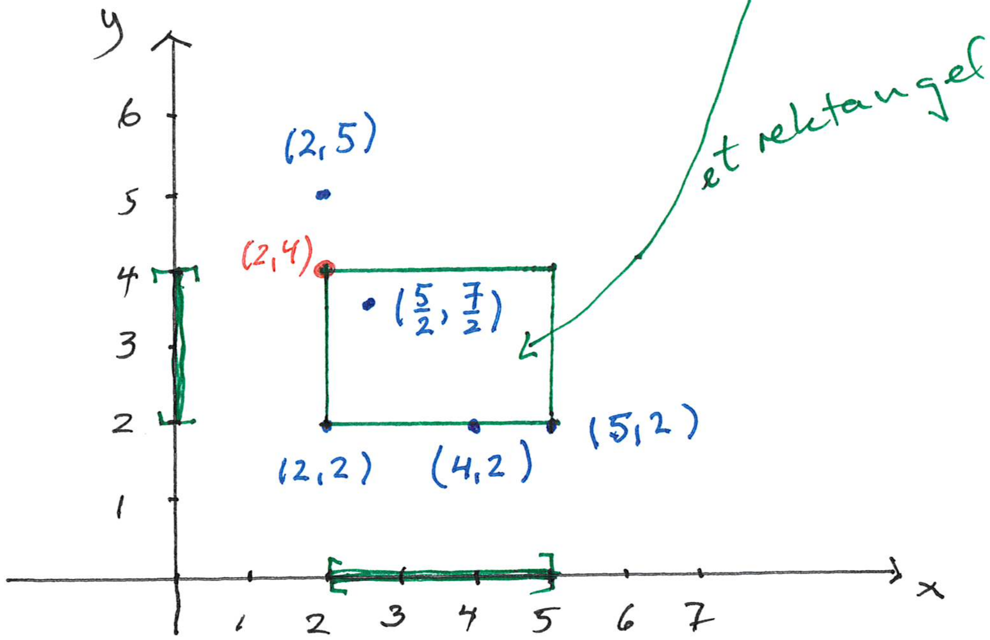
$(4,2)$ ja

$(2,5)$ nei

$(5,2)$ ja

$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ ja

$(2,2)$ ja



Start: 11.00

Kan regne verdier:

$f(x,y) = x + y - 2$ så:

$f(2,4) = 2 + 4 - 2 = 4$

$f(5,2) = 5 + 2 - 2 = 5$

$f(4,3) = 4 + 3 - 2 = 5$

funksjonsverdier

Hvis vi bare ser på punktene på nedre kant av rektangelet får vi en funksjon av én variabel:

$f(x,2) = x + 2 - 2 = x \quad (2 \leq x \leq 5)$

Punkter på høyre kant gir

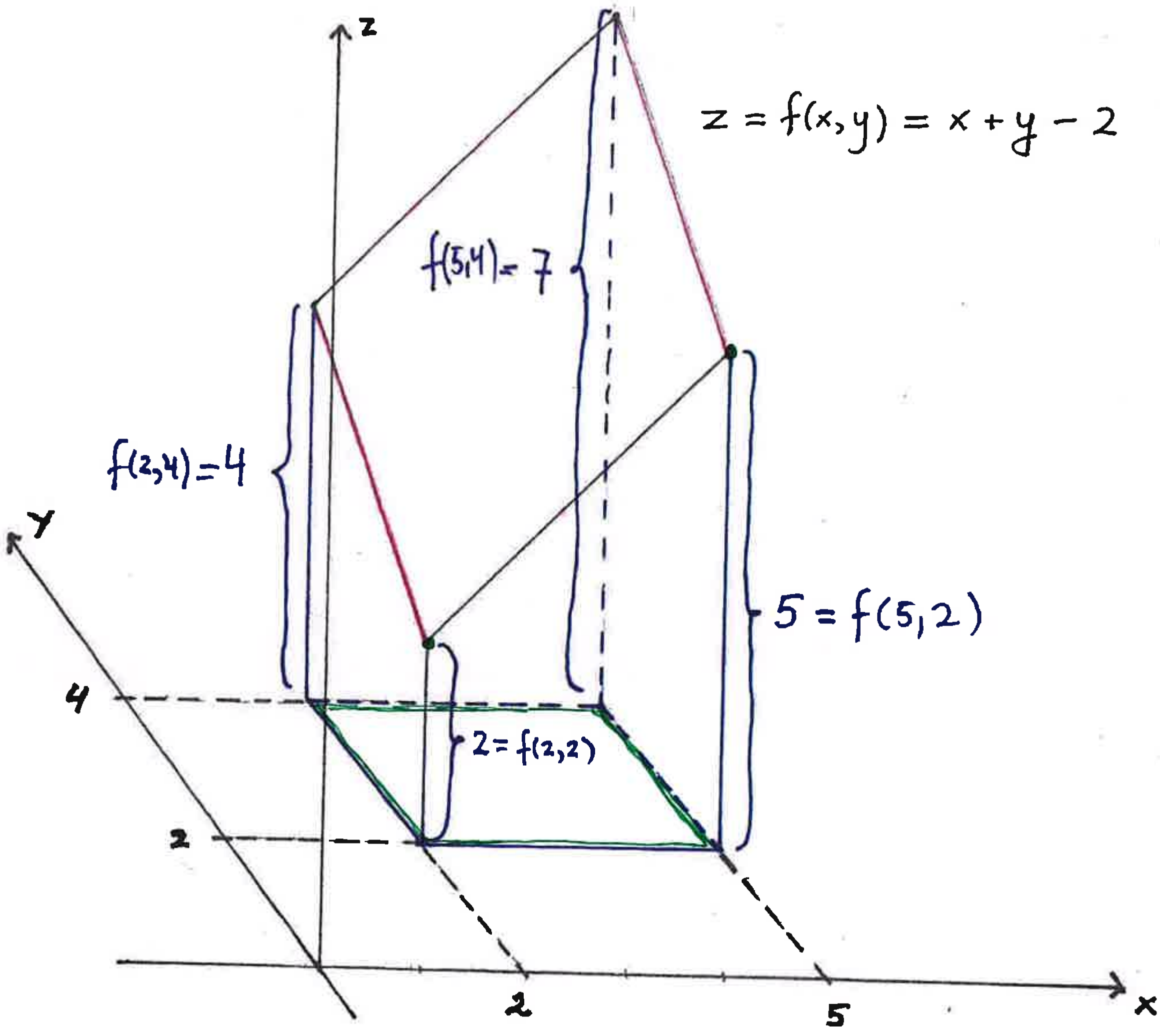
$f(5,y) = 5 + y - 2 = y + 3 \quad (2 \leq y \leq 4)$

Grafen til $f(x,y)$. er alle punkter (x,y,z)
i rommet slik at $z=f(x,y)$ og (x,y)
ligger i definisjonsområdet.
Grafen til $f(x,y)$ blir en flate i rommet
og „skyggen" ned på xy-planet er
definisjonsområdet.

Eks: $f(x,y) = x+y-2$ med $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$

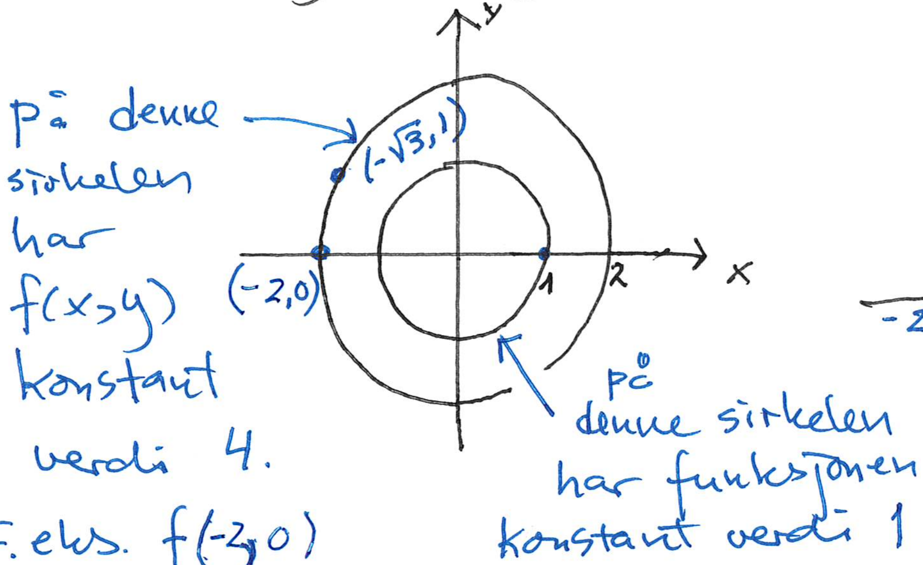
Dette er en lineær (førstegrads) funksjon
(fordi x og y er i første potens)
Da er grafen flat (et plan).

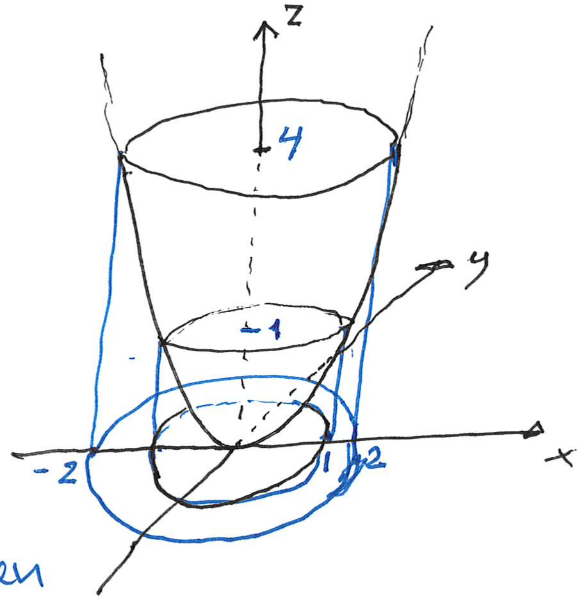
Viser grafen:


z
$z = f(x,y) = x + y - 2$
$f(5,4) = 7$
$f(2,4) = 4$
y
$5 = f(5,2)$
4
$2 = f(2,2)$
2
2
5
x

Nivåkurver er kurver i xy-planet som består av de punktene hvor funksjonen har konstant verdi.

Eks $f(x,y) = x^2 + y^2$

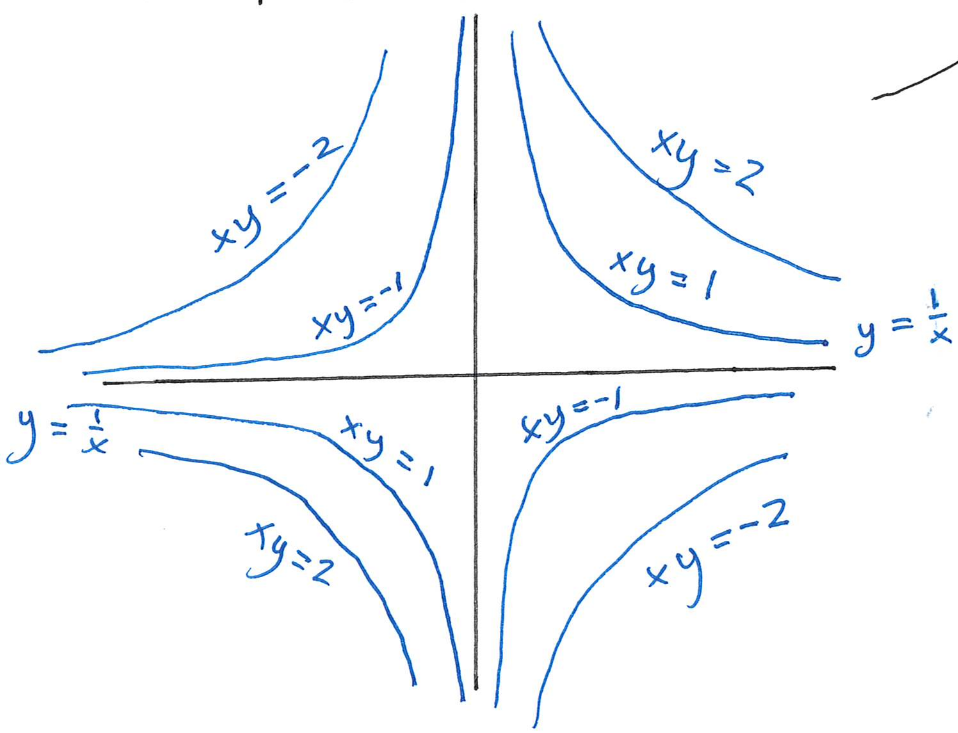


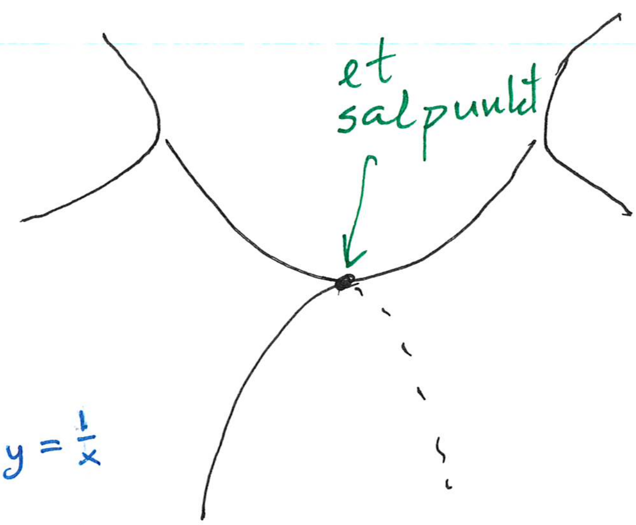


F. eks. $f(-2,0) = (-2)^2 + 0^2 = 4$ $\quad f(1,0) = 1^2 + 0^2 = 1$

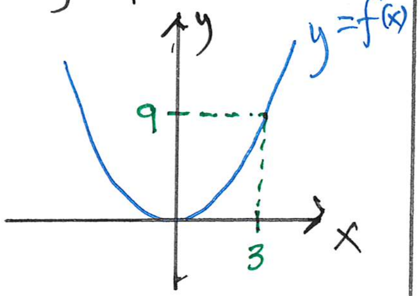
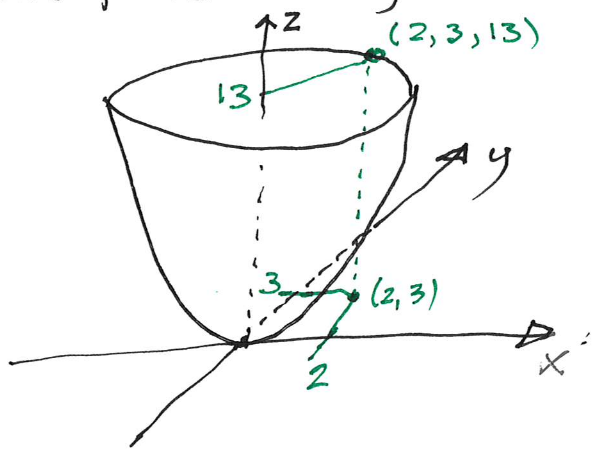
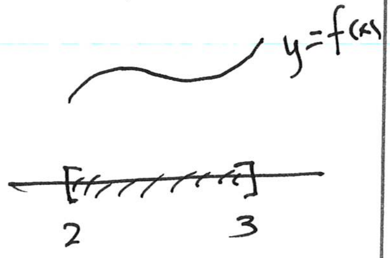
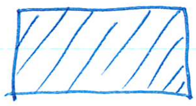
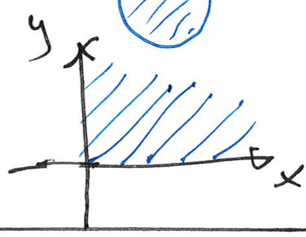
og $f(-\sqrt{3},1) = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

Eks $f(x,y) = xy$





En sammenligning av funksjoner i 1 og i 2 variabler

Hva	Funksjon i 1 var.	Funksjoner i 2 variabler
Uttrykk	$f(x) = x^2$ $f(3) = 3^2 = 9$	$f(x,y) = x^2+y^2$ $f(2,3) = 2^2+3^2 = 13$
Graf	En kurve i xy-planet 	En flate i xyz-rommet  (2, 3, 13) er et punkt på grafen til $f(x,y)$.
Definisjons-områder	Et intervall på x-aksen 	Et område i xy-planet Mange muligheter - et rektangel  - en sirkelskive  - første kvadrant $x \geq 0$ og $y \geq 0$ 
Nivå-kurver	- finnes ikke	Kurver i xy-planet hvor funksjonsverdien er konstant