MET 1180, forelesning 42, 7. mars 2024, Runar Ile

1. Indreproduktet, vinkelrette vektorer og gradienten
2. Optimering uten bibetingelser

---

1. Indreproduktet og gradienten

Eks $\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Da er

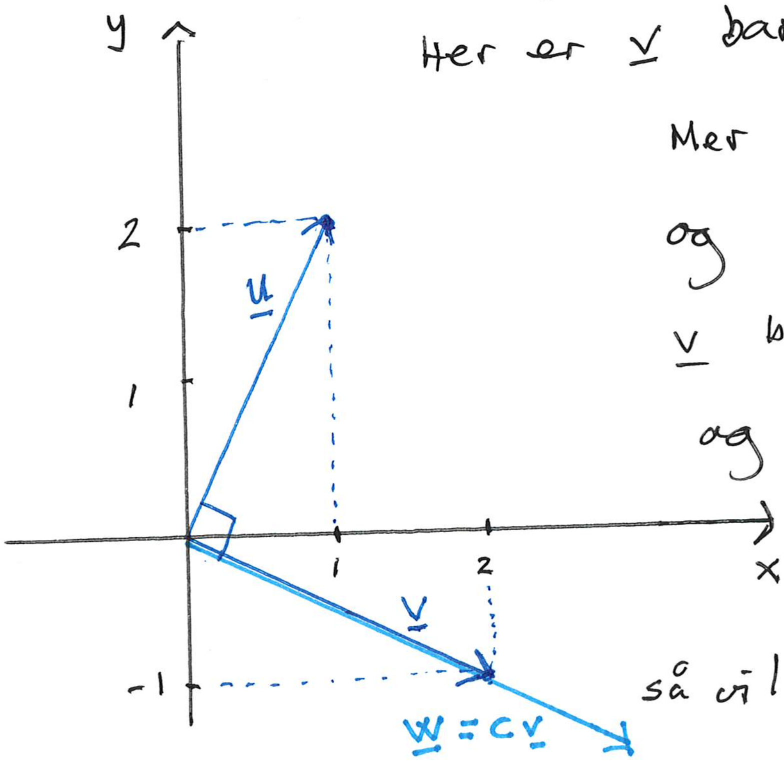
indreproduktet (prikkproduktet) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = \underline{\underline{2}}$

Eks $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2$
$= 2 - 4 + 6 = \underline{\underline{4}}$

$\boxed{\text{Hvis } \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \text{ så er } \underline{u} \text{ og } \underline{v} \text{ vinkelrette}}$

Eks $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Da er $\underline{u} \cdot \underline{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$

Altså er $\underline{u}$ og $\underline{v}$ vinkelrette på hverandre



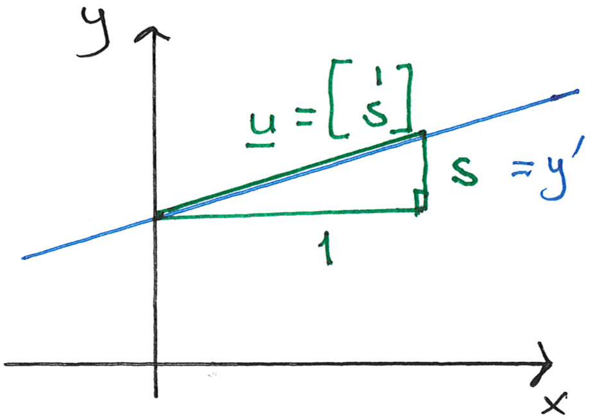
Her er $\underline{v}$ bare $\underline{u}$ rotert med 90°.

Mer generelt: Hvis $\underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ så er $\underline{v}$ bare $\underline{u}$ rotert med 90°

og $\underline{u} \cdot \underline{v} = ab + b \cdot (-a)$
$= ab - ab = 0$

Hvis $\underline{w} = c \cdot \underline{v}$
så vil $\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot (c\underline{v})$
$= c \cdot (\underline{u} \cdot \underline{v}) = c \cdot 0 = 0$

Retningen til en linje med stigningstall s kan beskrives med en vektor:



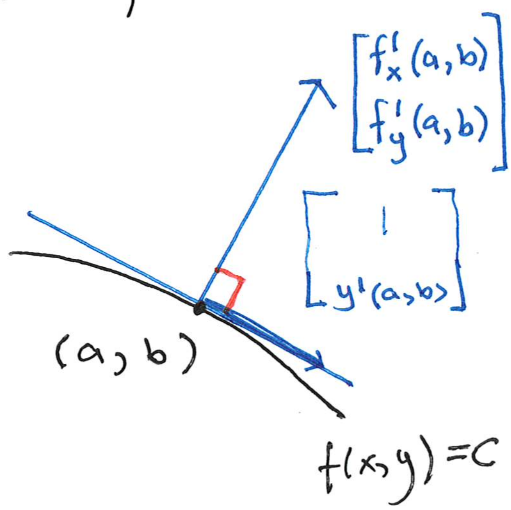
Repetisjon: En nivåkurve til en funksjon $f(x,y)$ med nivå $= C$ er løsningene på likningen $f(x,y) = C$.

Implisitt derivasjon av likningen gir

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$

Kan skrive VS som et indreprodukt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{denne vektoren peker i samme retning som tangenten til nivåkurven}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}}_{\nabla f} = 0$$



Altså er ∇f (når vi setter inn tall a og b for x og y) en vektor som er vinkelrett på tangenten til nivåkurven i punktet (a,b)

Eks (firs.) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
$= (x-1)^2 + 4y^2 - 1$

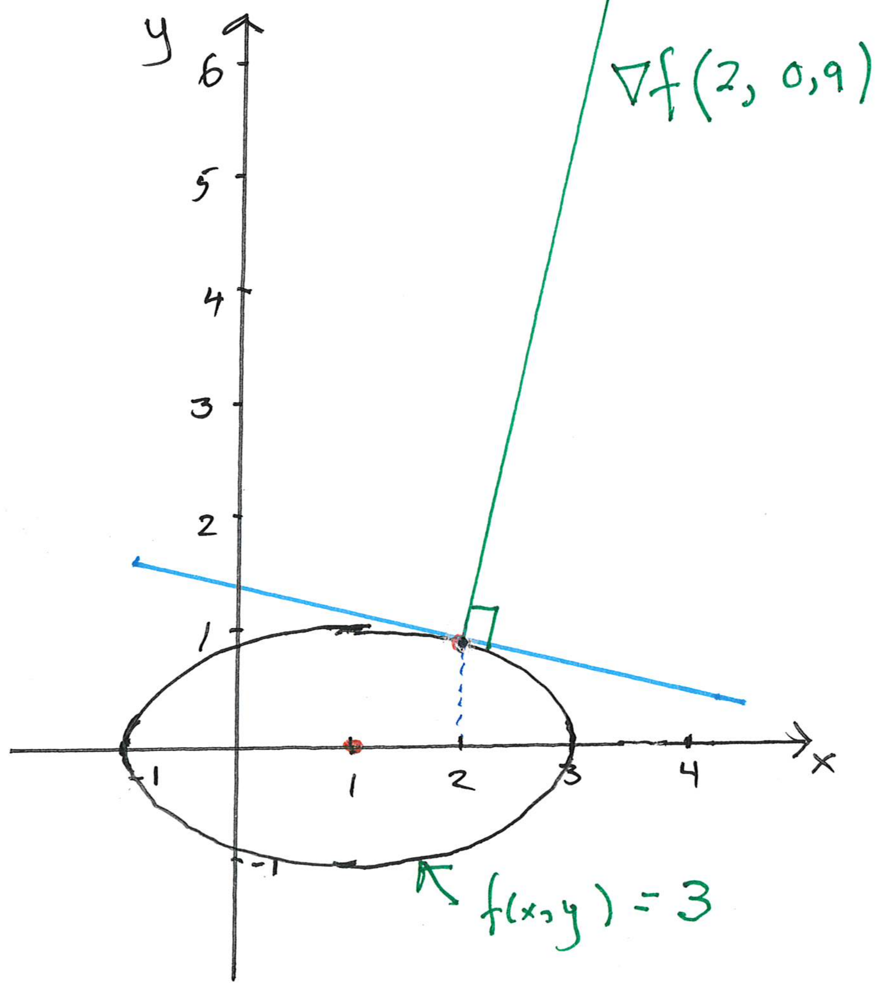
Nivåkurven for høyde 3 er løsningene på likningen $f(x,y) = 3$

dvs $(x-1)^2 + 4y^2 - 1 = 3$

$(x-1)^2 + 4y^2 = 4$ $\quad | : 4$

får $\dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

så nivåkurven er en ellipse med sentrum $(1,0)$ og horisontal halvakse $\sqrt{4} = 2$
vertikal —"— $\sqrt{1} = 1$



ser på $x = 2$ som gir $\dfrac{(2-1)^2}{4} + y^2 = 1$

dvs $y^2 = \dfrac{3}{4}$

$y = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0{,}9$

$y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}(2, 0{,}9)$

$= -\dfrac{2x-2}{8y}\,(x=2, y=0{,}9)$

$= -0{,}3$

$\nabla f(2, 0{,}9)$

$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 - 2 \\ 8 \cdot 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6{,}9 \end{bmatrix}$

Start: 11.04

2. Optimering uten bibetingelser

Hvordan finner vi maks. og min. til $f(x,y)$?

EKS $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

① Finn kandidatpunkter

3 typer:

* Stasjonære punkter: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$
* Spisser (der f'_x el. f'_y ikke er definert)
* Kantene på definisjonsområdet

Stasjonære punkter: $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & 1:3 \\ -3x + 3y^2 = 0 & 1:3 \end{cases}$

dvs $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x + y^2 = 0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x = (x^2)^2 = x^4 \end{cases}$

dvs $x = x^4$ dvs $x^4 - x = 0$ dvs $x(x^3-1)=0$

enten $x = 0$ eller $x = \sqrt[3]{1} = 1$

dvs $y = 0^2 = 0$ eller $y = 1^2 = 1$

Kandidatpunkter: $(0,0)$ og $(1,1)$.

– de to stasjonære punktene.

* Ingen spisser (f'_x og f'_y definert for alle x og y)

Et annet eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ og $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

– ikke definert når $x=0$ og $y=0$

Altså er $(0,0)$ en spiss.

* Kanter: Hele xy-planet er definisjonsomr. så ingen kanter.

Et litt annet eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ (samme) men $y \geq 0$.

Da er x-aksen en kant til definisjonsområdet. Må sjekke kanten for seg: $f(x,0) = x^3$ som har ett stasj. pkt., nemlig $\underline{x = 0}$ (og $y=0$)

---

(2) Klassifisére kandidatpunkter

Bruker Hessematrisen på de stasjonære punktene.

$$H(f) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

$$(0,0): \begin{bmatrix} 6\cdot 0 & -3 \\ -3 & 6\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

$$\det = AC - B^2 = 0\cdot 0 - (-3)(-3) = -9 < 0$$

Altså er $(0,0)$ et salpunkt (så ikke lok. maks. el. lok. min).

$$(1,1): \begin{bmatrix} 6\cdot 1 & -3 \\ -3 & 6\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

$$\det = AC - B^2 = 6\cdot 6 - (-3)(-3) = 36 - 9 = 27 > 0$$

Fordi $A = 6 > 0$ er $(1,1)$ et lok. minimumspkt.

Alternativt eks: $f(x,y) = x^4 + y^4$

$f'_x = 4x^3$, $f'_y = 4y^3$

Stasj. pkt: $(0,0)$

$f''_{xx} = 12x^2$

$f''_{xy} = 0$ $\qquad H = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$

$f''_{yy} = 12y^2$ $\qquad$ innsatt $(x,y) = (0,0)$ gir

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ med det $= 0$

Da sier ikke ABC-testen noenting.
Da må vi tenke:
$f(0,0) = 0^4 + 0^4 = 0$. For alle andre punkter er $f(x,y) > 0$ (en sum av to kvadrater). Altså er $(0,0)$ et globalt minimumspunkt ~~for~~ for $f(x,y)$.

3 Er $(1,1)$ et globalt minimumspunkt?

Nei, fordi $f(1,1) = 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 + 1^3 = -1$

mens $f(-2,0) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)\cdot 0 + 0^3$
$= -8$ som er mindre enn -1