MET 1180, forelesning 43, 12. mars 2024, Rune Ile

1. Repetisjon (Eksamen des. 2021, oppg 4a-b & oppg 7h og f forrige uke

2. Optimering med rand.

---

1. Repetisjon Eksamen des. 2021, oppg 4a-b.

Vi har $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$

a) Finn stasjonære punkter og klassifisér dem.

– hva betyr dette? – hva er planen?

Stasj. punkter: løsn. på likningssystemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

dvs $\begin{cases} 2x - 2xy^2 = 0 \\ 2y - 2x^2y = 0 \end{cases}$

dvs $\begin{cases} 2x\cdot(1-y^2) = 0 \\ 2y\cdot(1-x^2) = 0 \end{cases}$ dvs $x=0$ el. $y=1$ el. $y=-1$ og $y=0$ el. $x=1$ el. $x=-1$

Dette gir 5 stasjonære pkt:

$(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$

For å klassifisére disse (lok. maks.?, lok. min.?, sadel?) regner vi ut Hessematrisen, setter inn punktene og bruker ABC-testen.

Hessematrisen $H(f) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2-2x^2 \end{bmatrix}$

$\underline{(0,0)}$ $\quad H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ så $\det = AC - B^2 = 2^2 - 0^2 = 4 > 0$

og $A = f''_{xx}(0,0) = 2 > 0$ så  konveks

(0,0) er et lokalt minimumspunkt.

$\underline{(1,1)}$ $\quad H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ så $\det = 0^2 - (-4)^2 = -16 < 0$

så (1,1) er et salpunkt.

$\underline{(-1,1)}$ $\quad H(f)(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ så $\det(H(f)(1,-1)) = -4^2 = -16 < 0$

så (-1, 1) er et salpunkt.

$\underline{(1,-1)}$ $\quad H(f)(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ så (1,-1) er et salpkt.

$\underline{(-1,-1)}$ $\quad H(f)(-1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ så (-1,-1) er et salpunkt.

b) Bestem eventuelle globale maks. el. min.-verdier til f.

Fordi det ikke finnes lokale maksimumspunkter finnes det heller ikke globale maks.pkt.er og altså ingen global maksimumsverdi.

Men $(0,0)$ er et lok. minimumspunkt

og $f(0,0) = 0^2+0^2-0^2\cdot 0^2 = 0$

kan være den globale minimumsverdien.

Men med $y=x$ er $f(x,x) = x^2+x^2-x^2\cdot x^2$

$= 2x^2 - x^4$

For $x>\sqrt{2}$ (eller $x<-\sqrt{2}$)

$= x^2(2-x^2)$.

vil $2-x^2<0$ og

$x^2>0$ så $x^2(2-x^2) < 0$. F.eks.

$x = 2 = y$ gir $f(2,2) = 2^2\cdot(2-2^2) = -8 < 0$

Altså er $(0,0)$ ikke et globalt minimumspkt.

og det finnes ingen minimumsverdi.

$\boxed{\text{Start: 11.01}}$

<u>Oppg 7h</u> (forrige uke) Finn evt. glob. maks./min. for f.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f'_x(x,y) = 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Kjerneregelen:

$u = x^2+y^2$ og $g(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

$u'_x = 2x \quad g'(u) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

Tilsvarende (symmetri):

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

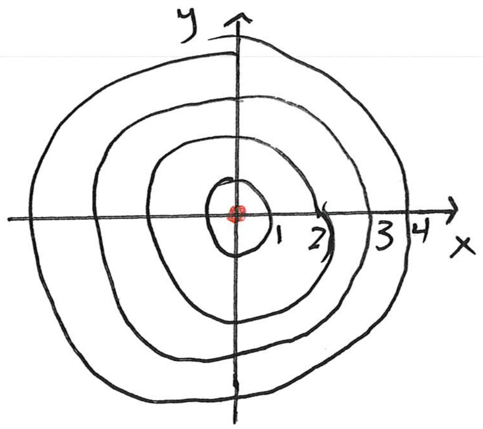
NB: f'_x og f'_y er <u>ikke</u> definerte for $(x,y) = (0,0)$.

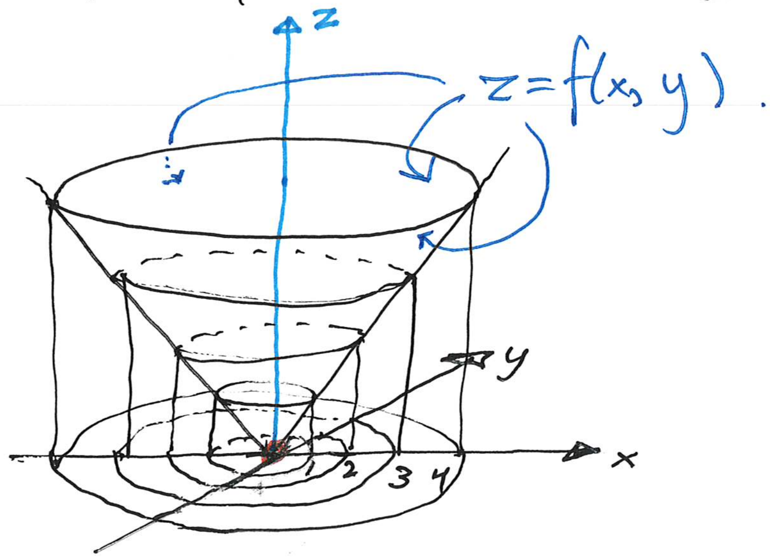
Så f har <u>ingen</u> stasjonære punkter!

- fordi $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ har ingen løsninger.

Men nivåkurvene til f er sirkler med sentrum i origo: løsn. til $\sqrt{x^2+y^2} = c$ (med $c > 0$) er en sirkel med sentrum $(0,0)$ og radius c. (Std. form: $x^2+y^2=c^2$)

Hvis $c=0$ er $(x,y)=(0,0)$. For $c<0$ er det ingen løsninger. Altså er $(0,0)$ minimumspunktet med global minimumsverdi $f(0,0) = \sqrt{0^2+0^2} = \sqrt{0} = \underline{\underline{0}}$





Dette betyr at $(0,0)$ er det globale min. punktet og at det ikke finnes globale maks. punkter.

2. Optimering med rand

Optimering uten bibetingelser : maks/min $f(x,y)$

Optimering med —‖— : maks/min $f(x,y)$ når (x,y) ligger i et området D (en definisjonsmengde)

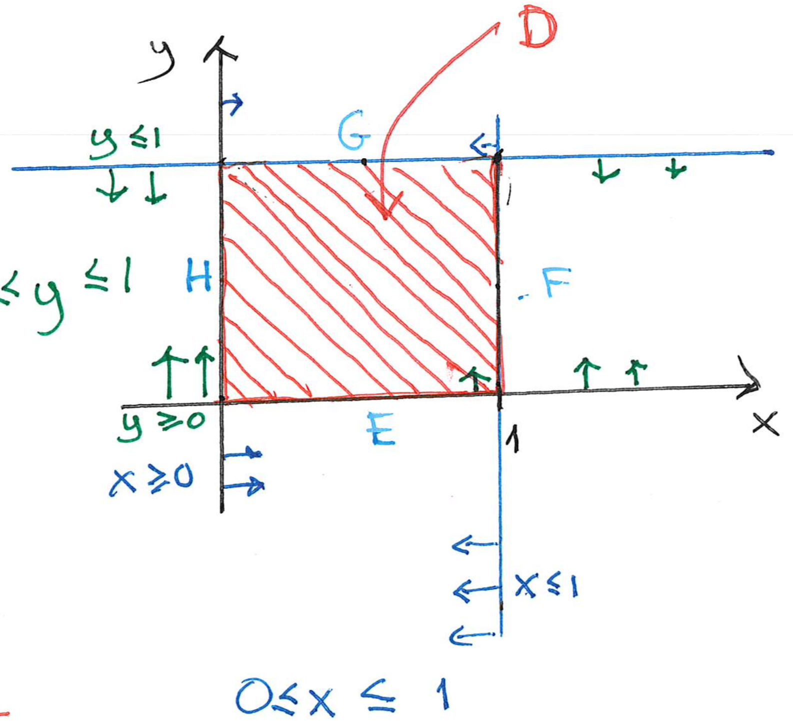
Eks maks $f(x,y)=x+y$

bibetingelse!

når $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$ } Kort skrivemåte: $0 \le x, y \le 1$

$f'_x(x,y) = 1$, $f'_y(x,y) = 1$ } så ingen stasjonære punkter! (1 kan ikke være 0!)

Da må vi lete på randen til definisjonsområdet D.



Randen til D er kantene på kvadratet.

E : $y=0$ og $0 \le x \le 1$

Da er $f(x,y) = f(x,0) = x$

Maks. på E er $f(1,0) = \underline{1}$

F: $x=1$ og $0 \le y \le 1$. Da er $f(x,y) = f(1,y) = 1+y$

Maks. på F er $f(1,1) = 1+1 = \underline{2}$

G: $y=1$ og $0 \le x \le 1$. Da er $f(x,y) = f(x,1) = x+1$

Maks. på G er $f(1,1) = 1+1 = \underline{2}$

H : $x=0$ og $0 \le y \le 1$. Da er $f(x,y) = f(0,y) = y$

Maks. på G er $f(0,1) = \underline{1}$.

Størst verdi på randen til D : $f(1,1) = 2$.

Faktisk er $f(1,1) = 2$ maks. til $f(x,y)$ på D.

- det er alltid sånn ....