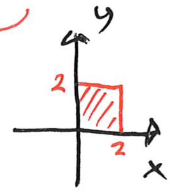
MET 1180, forelesning 44, 14. februar 2024, Runar Ile

1. optimering med rand – den tillatte mengden
2. Lukket og begrenset = kompakt
3. Ekstremverdisetningen

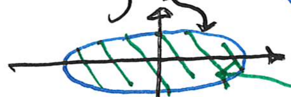
1. Optimering med rand – den tillatte mengden

Eks i) maks/min $f(x,y) = xy - 3x + 2y$ når $\underbrace{0 \leq x, y \leq 2}$

$0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq 2$



ii) maks/min $f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 = 36$ — bare randa

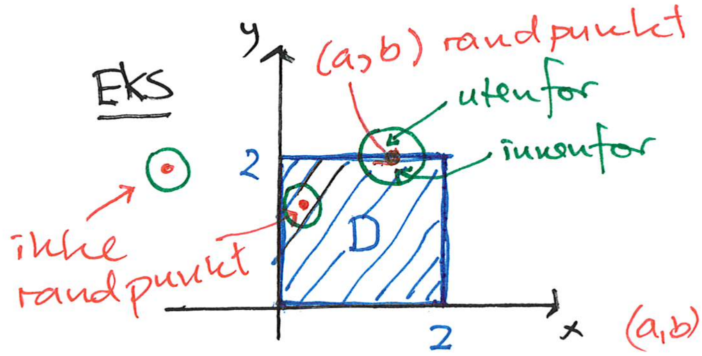


iii) maks/min $f(x,y) = xy$ når $x^2 + 4y^2 \leq 36$ — rand + indre punkter

Mengden av tillatte punkter D er de punktene (x,y) som vi kan sette inn i $f(x,y)$.
Dette er <u>bibetingelsen</u> i optimeringsproblemet

<u>Definisjon</u> $(x,y) = (a,b)$ er et <u>randpunkt</u> for D hvis alle sirkler med sentrum i (a,b) inneholder punkter fra D <u>og</u> inneholder punkter som ikke er i D.

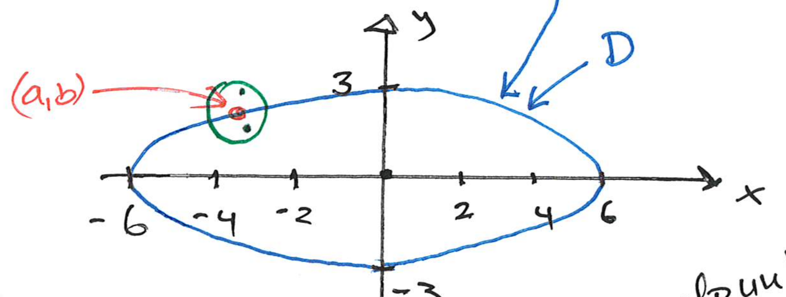
<u>Eks</u>



$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

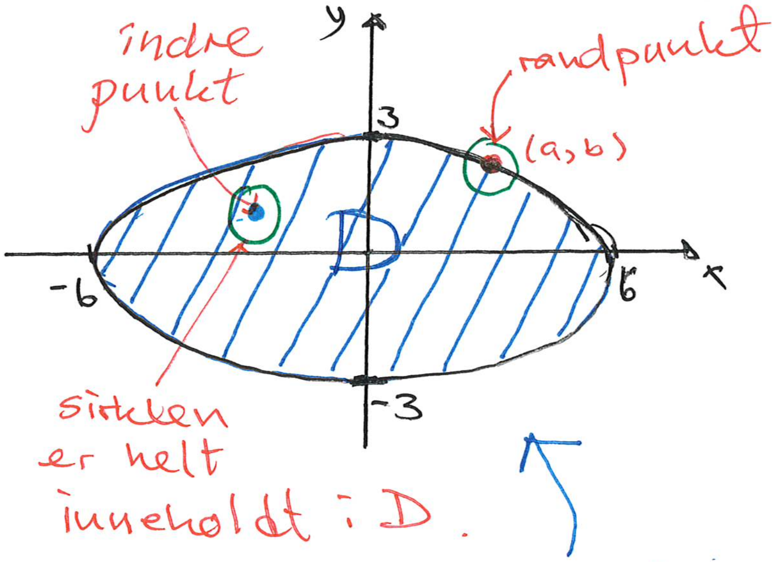
<u>Eks</u> $x^2 + 4y^2 = 36$ dvs

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

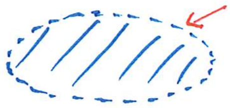


Alle punkter i D er randpunkter!

Eks $x^2 + 4y^2 \le 36$



Eks $x^2 + 4y^2 < 36$ – alle punkter i D, bortsett fra randpunktene



NB: Alle punktene på ellipsen $x^2+4y^2=36$ er randpunkter til D, men de hører ikke til D.

2. Lukket og begrenset = kompakt

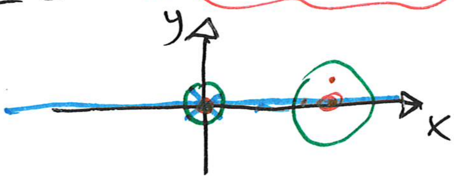
Definisjon Mengden D er lukket hvis alle randpunktene til D er med i D.

Eks: $x^2 + 4y^2 \le 36$ er lukket.

Eks: $x^2 + 4y^2 < 36$ er ikke lukket.

Eks $D : \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ x-aksen bortsett fra $x=0$

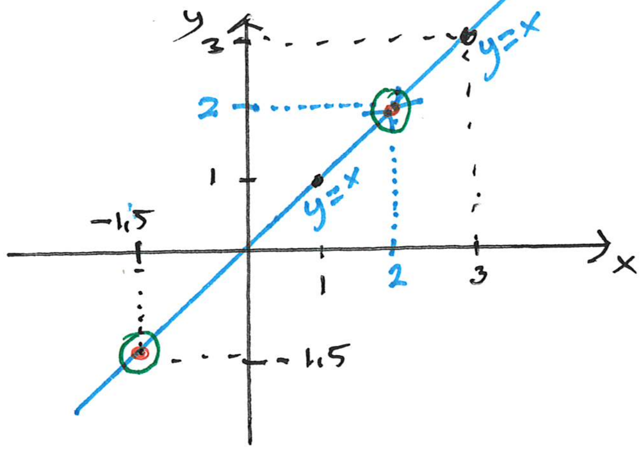
Start: 11.00



Randpunktene til D er alle punkter på x-aksen.

Fordi (0,0) er et randpunkt som ikke ligger i D, er D *ikke* lukket.

Eks $D: \begin{cases} y = x \\ x \neq 2 \end{cases}$

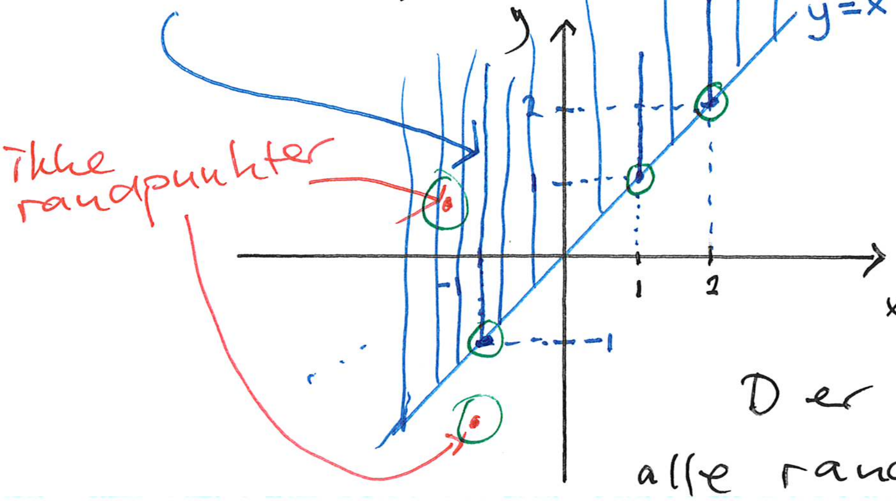


randpunkter: $\{y=x\}$

D lukket?: Nei,

fordi $(2,2)$ er randpunkt, men $(2,2)$ er ikke i D.

Eks D er alle punkter (x,y) med $y \geq x$.



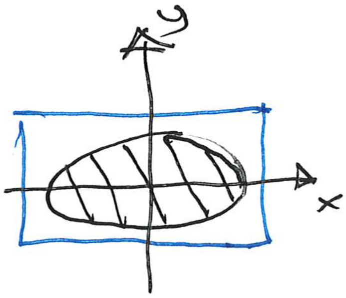
Randpunkter: Linjen $y = x$

D er lukket fordi alle randpunktene er med i D.

Definisjon En mengde D (i planet) er begrenset hvis det finnes et rektangel slik at D ligger inne i rektangelet.

Eks: $y \geq x$ er ikke begrenset

Eks: $x^2 + 4y^2 \leq 36$ er begrenset:



<u>Definisjon</u> En mengde D er <u>kompakt</u> hvis D er både lukket og begrenset.

<u>3. Ekstremverdisetningen</u>

Hvis $f(x,y)$ er en kontinuerlig funksjon og mengden D er kompakt, så har $f(x,y)$ både (minst) et maksimums-punkt og (minst) et minimumspunkt

Disse punktene finnes blant kandidatpunktene:

i) Stasjonære punkter: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

ii) Punkter hvor enten f'_x eller f'_y ikke finnes.

iii) Randpunkter