MET 1180, forelesning 45, 19. mars 2024, Rumar Ile

Repetisjon: Oppgaver (1, 2p, 4cd, 5c)

oppg 1 $\quad D = \{ (x,y) \mid y(x-2) \le 3 \}$

"slik at"

Forenkler ulikheten med y alene på VS ved å dele med $x-2$ på BS. Tre tilfeller:

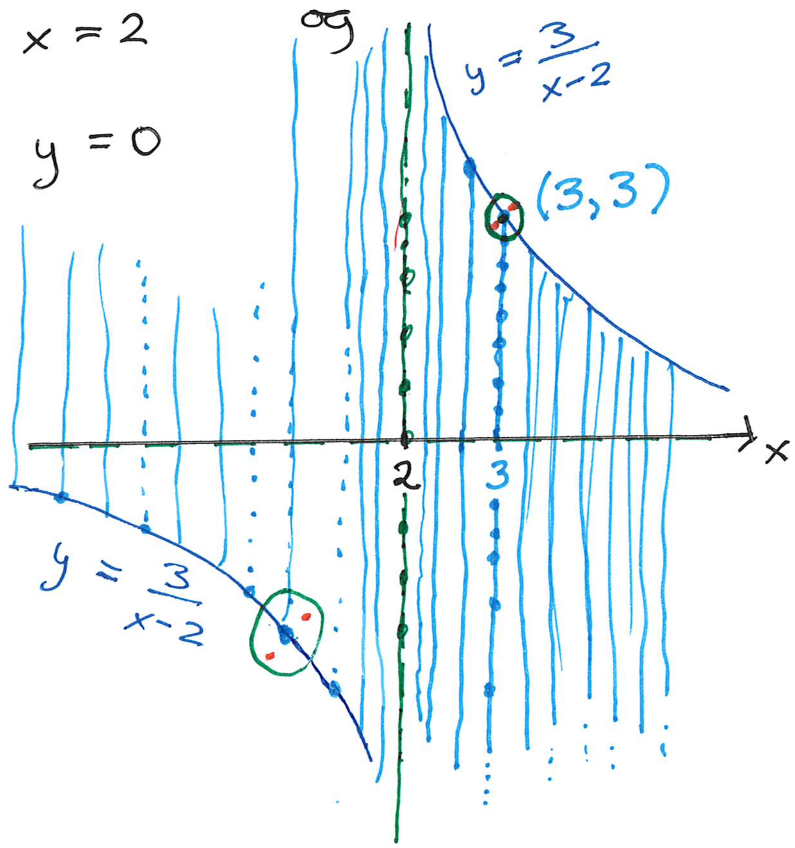
i) $x-2>0$ gir $y \le \dfrac{3}{x-2}$

dvs $x > 2$

Grafen til $y = \dfrac{3}{x-2}$ er en hyperbel med og

vertikal asymptote $x=2$

horisontal asymptote $y=0$



ii) $x-2<0$

dvs $x<2$ NB!

gir $y \ge \dfrac{3}{x-2}$

iii) $x-2=0$

dvs $x=2$. Da er

ulikheten $y \cdot 0 \le 3$

dvs $0 \le 3$ som er

sann for alle y (og $x=2$)

Da er randpunktene til D gitt av hyperbelen $y = \dfrac{3}{x-2}$

Fordi alle randpunktene er med i D er D en lukket mengde.

Indre punkter : Alle punkter i D som ikke er randpunkter.

Her er det området mellom de to greinene til hyperbelen, men uten hyperbelen selv.

D er ikke kompakt (= lukket og begrenset) fordi D ikke er begrenset. F.eks. er alle punkter $(a, 0)$ for alle tall a. er i D

punkter på x-aksen

eller: alle punkter $(2, b)$ for alle tall b

er i D

alle punkter på den vertikale asymptoten

Disse delmengdene er ubegrensete.

Oppg 2 p

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 1$$

$$(x^2-1)(y^2-1) = 1 \quad (\text{må ha } x \neq \pm 1)$$

Da er

$$y^2 - 1 = \frac{1}{x^2-1}$$

så

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$x^2 \geq 0$ for alle x, $x^2 - 1 < 0$ for $-1 < x < 1$ → neg. HS, ingen løsninger!

Men likn. har løsn. for $x < -1$ og $x > 1$:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

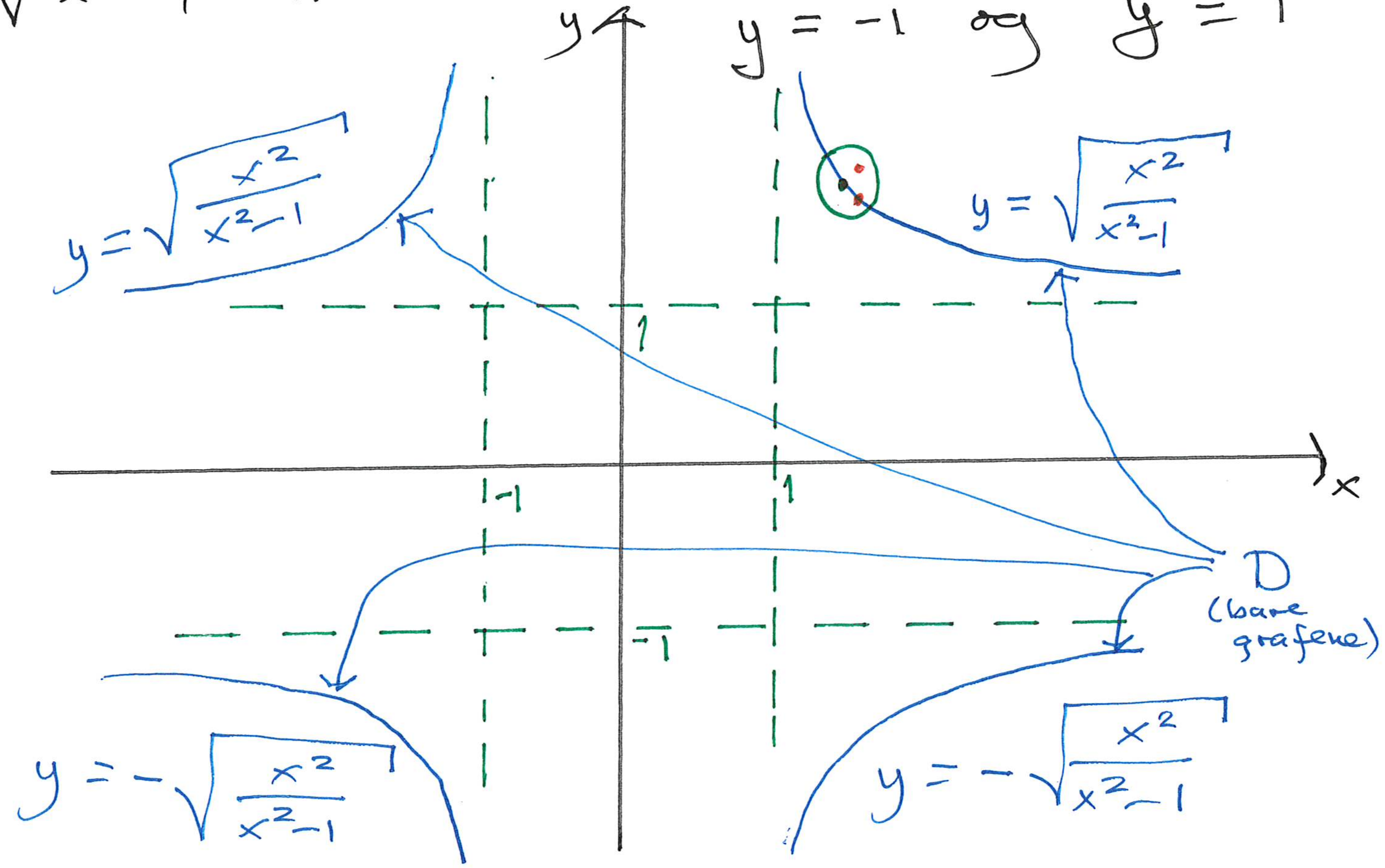
vertikale asymptoter:

$x = -1$ og $x = 1$

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

horisontale asymptoter:

$y = -1$ og $y = 1$



Alle randpunkter til løsningsmengden er på grafen (faktisk randpunktene = løsningsmengden) så løsningsmengden D er <u>lukket</u>.

Men grafen er <u>ikke</u> <u>begrenset</u> (f. eks. er det punkter på grafen med vilkårlig store x-verdier). Altså er D <u>ikke</u> <u>kompakt</u>. (lukk. + begr.)

Start: 11.05

oppg 4

c) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $x^2+y^2 = 16$

$f(x,y)$ har nivåkurver som er ellipser

bibetingelsen er en sirkel med radius $\sqrt{16} = 4$

og sentrum $(0,0)$.

Min. pkt. $(\pm 4, 0)$ m. minimumsverdi

$$f(\pm 4, 0) = 4\cdot(\pm 4)^2 + 9\cdot 0^2 = \underline{\underline{64}}$$

Maks. pkt. $(0, \pm 4)$ m. maks. verdi

$$f(0, \pm 4) = 4\cdot 0^2 + 9\cdot(\pm 4)^2 = \underline{\underline{144}}$$

d) $g(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ når $x = y$

$\left[NB: \ -4 \leq x, y \leq 4 \text{ betyr } \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \text{ og} \right]$

Maks. pkt: $(-4,-4)$ og $(4,4)$ med

maksimumsverdi $g(-4,-4) = (-4)^2(-4)^2 - (-4)^2 - (-4)^2 + 1$

$$= 256 - 16 - 16 + 1$$

$$= \underline{\underline{225}} = g(4,4).$$

Er $(0,0)$ (lokalt) maks. el. min. pkt ??

Setter $y = x$ inn i $g(x,y)$ og får

←navn på denne

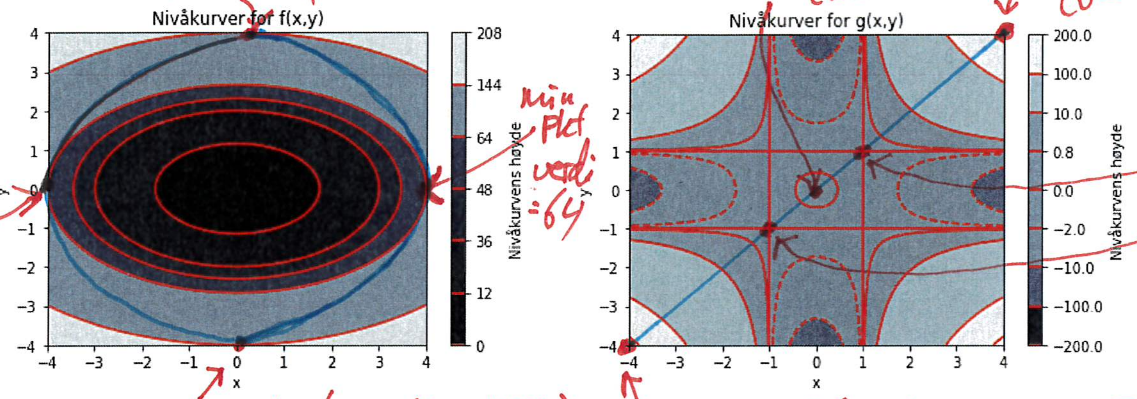
$$h(x) = g(x, x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

Oppgave 4.

Nivåkurver for funksjonene $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ og $g(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ i området $-4 \le x, y \le 4$ er vist i figurene nedenfor.

maks.pkt.(verdi = 144) lok.maks.pkt (verdi = 1) maks.pkt. (verdi = 225)

min.pkt verdi = 64 min pkt verdi = 64 min = 0 min = 0



maks.pkt.(verdi = 144) maks.pkt.(verdi = 225)

a) Finn max / min $f(x, y)$ når $-4 \le x, y \le 4$ ved hjelp av figuren.

b) Finn max / min $g(x, y)$ når $-4 \le x, y \le 4$ ved hjelp av figuren.

c) Finn max / min $f(x, y)$ når $x^2 + y^2 = 16$ ved hjelp av figuren.

d) Finn max / min $g(x, y)$ når $x = y$ ved hjelp av figuren.

Oppgave 5.

Løs optimeringsproblemene.

a) max / min $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \le x, y \le 1$

b) max / min $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \le x, y \le 2$

c) max / min $f(x, y) = e^{xy-x-y}$ når $0 \le x, y \le 2$

d) max / min $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)$ når $-1 \le x, y \le 1$

e) max / min $f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ når $-1 \le x, y \le 1$

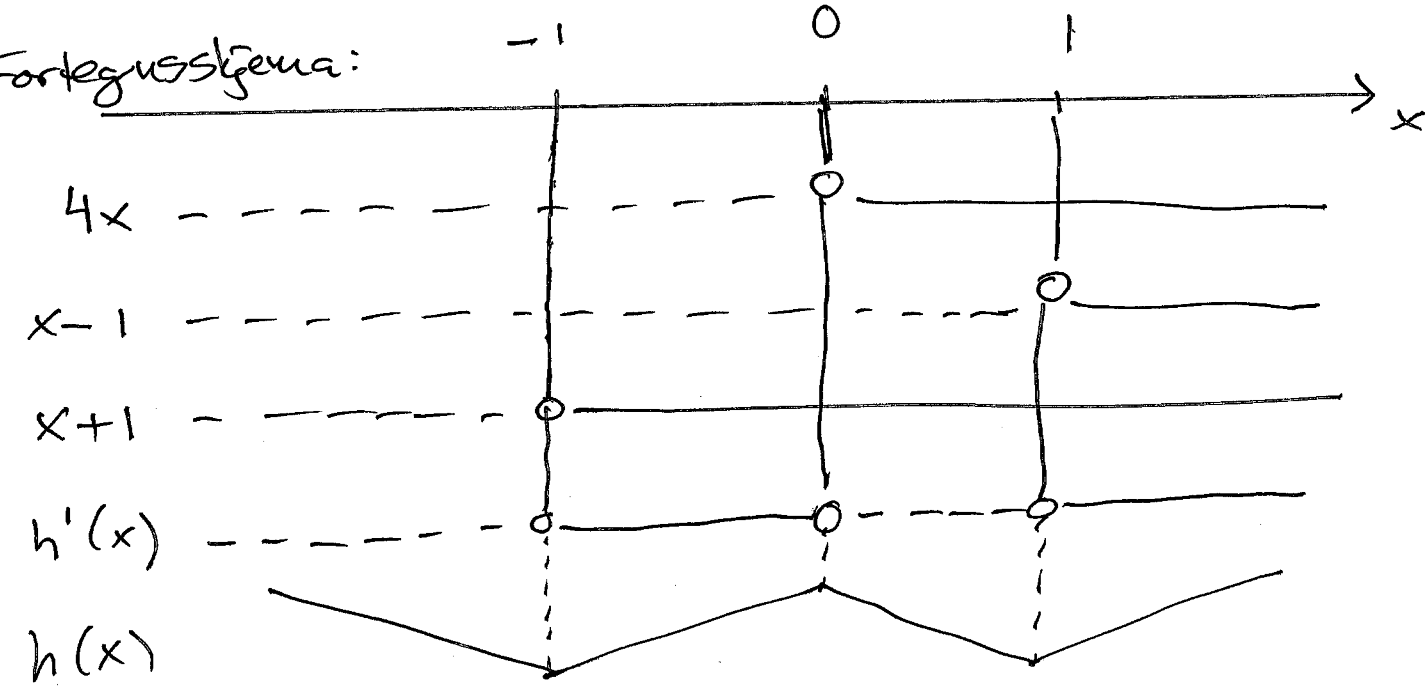
Oppgave 6.

Finn maksimums- og minimumsverdien i optimeringsproblemet

$$\max / \min f(x, y) = \sqrt{xy} - x \text{ når } 0 \le x, y \le 1 .$$

$$h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$$
$$= 4x(x-1)(x+1)$$

Fortegnsskjema:



Så $(-1,-1)$ og $(1,1)$ gir lok. min. punkter for $h(x) = g(x,x)$ med verdi

$$g(-1,-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^2 + 1 = 1-2+1 = \underline{0}$$

og $g(1,1) = \underline{0}$

lok. maks. pkt. er $(0,0)$ og

$$g(0,0) = 0^4 - 2\cdot 0^2 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

Maks. verdi for $g(x,y)$ gitt $x=y$ er $\underline{\underline{225}}$ og minimumsverdi er $\underline{\underline{0}}$

Rekk ikke denne på forelesningen:

Oppg 5c maks/min $f(x,y) = e^{xy-x-y}$ for $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \text{og} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Spekker (i) stasj. pkt. : det indre

(ii) punkter hvor f'_x el. f'_y ikke finnes

(iii) maks. og min. på randa

i) $f'_x(x,y) = (y-1)e^{xy-x-y}$

og $f'_y(x,y) = (x-1)e^{xy-x-y}$

Bruker kjerneregelen med $u = xy-x-y$

Da er $g(u) = e^u$ og $g'(u) = e^u$

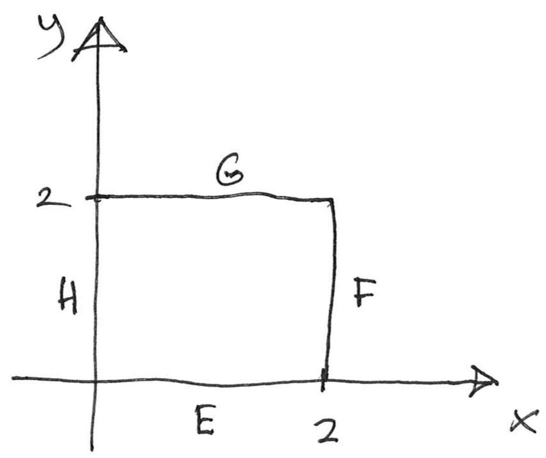
mens $u'_x = y-1$ og $u'_y = x-1$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ gir (fordi $e^u \neq 0$) $\begin{cases} y-1 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Beregner $f(1,1) = e^{1\cdot 1-1-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \underline{0,37}$

ii) f'_x og f'_y er definerte for alle (x,y).

iii)



E: $\underline{0 \leq x \leq 2 \text{ og } y=0}$: $f(x,0) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (avt.)

som har maks. for $x=0$ og min. for $x=2$

$f(0,0) = e^0 = \underline{1}$, $f(2,0) = \frac{1}{e^2} \approx \underline{0,14}$

F: $\underline{x=2, \ 0 \leq y \leq 2}$: $f(2,y) = e^{y-2}$ (voks.)

som har maks. for $y=2$ og min. for $y=0$

Nytt punkt: $f(2,2) = e^0 = \underline{1}$

G: $\underline{0 \leq x \leq 2, \ y=2}$: $f(x,2) = e^{x-2}$ (voks.)

som har maks. for $x=2$ og min. for $x=0$

Nytt punkt: $f(0,2) = f(2,0) = \frac{1}{e^2} \approx \underline{0,14}$

H: $\underline{x=0, \ 0 \leq y \leq 2}$: $f(0,y) = \frac{1}{e^y}$ (avt.)

maks: $(0,0)$, min $(0,2)$, men disse er allerede ~~tatt~~.

<u>Konkl</u> Maks.punkter er $(0,0)$ og $(2,2)$
med maks. verdi $f(0,0) = \underline{\underline{1}} = f(2,2)$

Min. punkter er $(2,0)$ og $(0,2)$
med min. verdi $f(2,0) = \underline{\underline{\frac{1}{e^2}}} = f(0,2)$