MET 1180, forelesning 46, 19. mars 2024, Runar Ile

Maks/min til en funksjon $f(x,y)$ med bibetingelse:
Lagranges multiplikatormetode

Hvordan finne maks. og min. punkter for $f(x,y)$ når vi har en begrensning D?

- Enten stasjonære punkter i det indre av D (det indre = punktene i D som ikke er randpunkter)
- Eller punkter på randen.

Lagranges metode bruker vi hvis randa er mer komplisert,

gitt ved en likning $g(x,y) = a$
- dette er en implisitt definert kurve (som består av punkter som er løsninger på denne likningen.)

Lagranges metode finner maks. og min på denne implisitt definerte kurven.

Eks Vil finne maks $f(x,y) = x+2y$

når $x^2+4y^2 = 36$

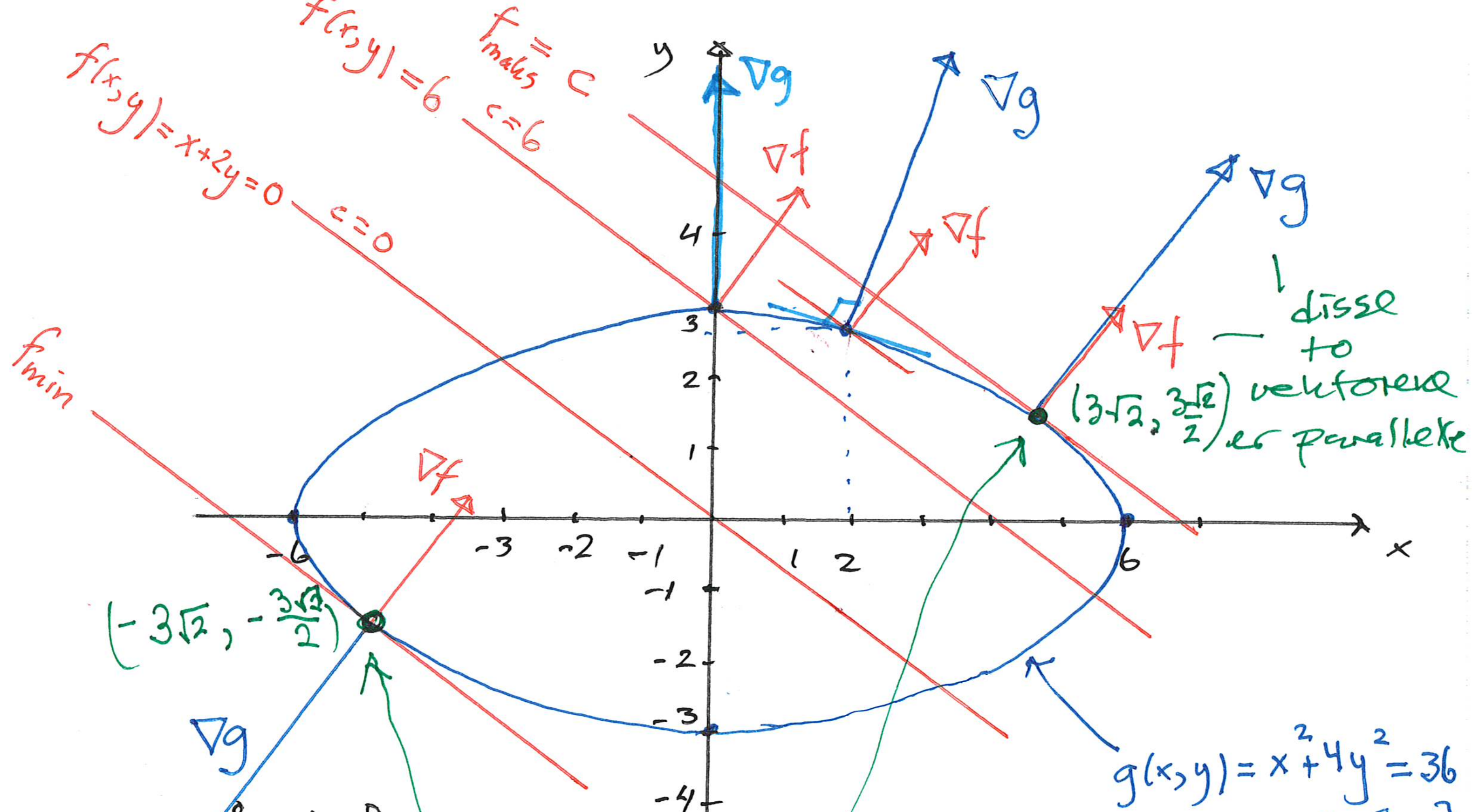
(så $g(x,y) = x^2+4y^2$ og $a = 36$)

Kurven gitt av $g(x,y)=36$ er en ellipse med sentrum $(0,0)$

og horisontal halvakse $a = 6$

og vertikal — " — $b = 3$

std. form: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$



$$\nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 8y \end{bmatrix}$$

– gradienten til $g(x,y)$

ser på nivåkurver til $f(x,y) = x + 2y$

$f(x,y) = c$.

– dette er linjer. F.eks.

$x + 2y = 6$ gir $2y = -x + 6$

så $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Gradienten til $f(x,y)$: $\nabla f = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

De to grønne er kandidatpunkter for maks/min $\underset{x+2y}{\underset{\parallel}{f(x,y)}}$ når $\underset{x^2+4y^2}{\underset{\parallel}{g(x,y)}} = 36$

De grønne punktene er der ∇f og ∇g er parallelle, dvs at finnes et tall λ „lambda"

slik at $\boxed{\nabla f = \lambda \cdot \nabla g}$ Dessuten er $g(x,y) = 36$

Dvs $\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 2 = \lambda \cdot 8y & (2) \\ x^2+4y^2 = 36 & (3) \end{cases}$ $\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 8y \end{bmatrix}$

– tre likninger med 3 ukjente x, y, λ.

Løser likningssystemet for å finne de gitte punktene: Start: 11.00

Første løsningsmetode: Finner x og y uttrykt v.h.a. λ: NB: $\lambda \neq 0$. Da er

(1): $x = \frac{1}{2\lambda}$ (2): $y = \frac{2}{8\lambda} = \frac{1}{4\lambda}$

setter dette inn for x og y i

(3): $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 36$

dvs $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{\cancel{4}\,1}{\cancel{16}\,4\,\lambda^2} = 36$

dvs $\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2\,\lambda^2} = 36$ $| \cdot 2$

dvs $\frac{1}{\lambda^2} = 72$ dvs $\lambda^2 = \frac{1}{72}$

så $\lambda = \frac{1}{\sqrt{72}}$ el. $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{72}}$

$x = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{72}}}$ $x = -\frac{\sqrt{72}}{2}$

$x = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{72}}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{72}}}_{=1} = \frac{\sqrt{72}}{2}$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{72}} = \frac{1}{\sqrt{8\cdot 9}} = \frac{1}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{72}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{72}}{4} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{72}} = -\frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\sqrt{72}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{72}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

To kandidatpunkter:

$(x,y) = \left(3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ og $(x,y) = \left(-3\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

som gir verdier

$$f\left(3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + \cancel{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,4$$

– størst

$$f\left(-3\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} + 2\cdot\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2} \approx -8,4$$

– minst.

$$f_{maks} = 6\sqrt{2} \qquad f_{min} = -6\sqrt{2}$$

Andre løsningsmetode Løser (1) og (2) for λ:

(1): $\lambda = \frac{1}{2x}$ (NB: $x \neq 0$)

(2) $\lambda = \frac{1}{4y}$ (NB: $y \neq 0$)

Gir ny likning uten λ:

(4) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{4y} \quad | \cdot 4xy \qquad \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{x}y}{\cancel{2}\cancel{x}} = \frac{\cancel{4}x\cancel{y}}{\cancel{4}\cancel{y}}$

4

Får $2y = x$ og setter $x = 2y$

inn i (3): $(2y)^2 + 4y^2 = 36$

dvs $4y^2 + 4y^2 = 36$

dvs $8y^2 = 36 \quad | : 8$

$$y^2 = \frac{36}{8} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 3}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2} = \frac{9}{2}$$

Så $y = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ el. $y = -\sqrt{\frac{9}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

Da er $x = \frac{6}{\sqrt{2}}$ $\qquad x = -\frac{6}{\sqrt{2}}$

Kand. punkter $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ og $\left(-\frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(de samme som med den første metoden).

Eks min $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $\underbrace{xy}_{g(x,y)} = 1$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Likningene er $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ og $g = 1$

dvs $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ og $xy = 1$

dvs $\begin{cases} 2x = \lambda y & (1) \\ 2y = \lambda x & (2) \\ xy = 1 & (3) \end{cases}$ Fra (1): $x = \frac{\lambda y}{2}$ (4)

Setter $x = \frac{\lambda y}{2}$ inn i (2): $2y = \lambda \cdot \frac{\lambda y}{2}$ $\big| :2$

dvs $4y = \lambda^2 y$ $\big| : y$ (som er ulik 0)

$4 = \lambda^2$

dvs $\underline{\lambda = 2}$ eller $\underline{\lambda = -2}$.

(1) blir $2x = 2y$

$x = y$

(3) gir $x^2 = 1$

så $\underline{x = 1 = y}$

eller $\underline{x = -1 = y}$

(1) blir $2x = -2y$

så $x = -y$

(3) gir $x \cdot (-x) = 1$

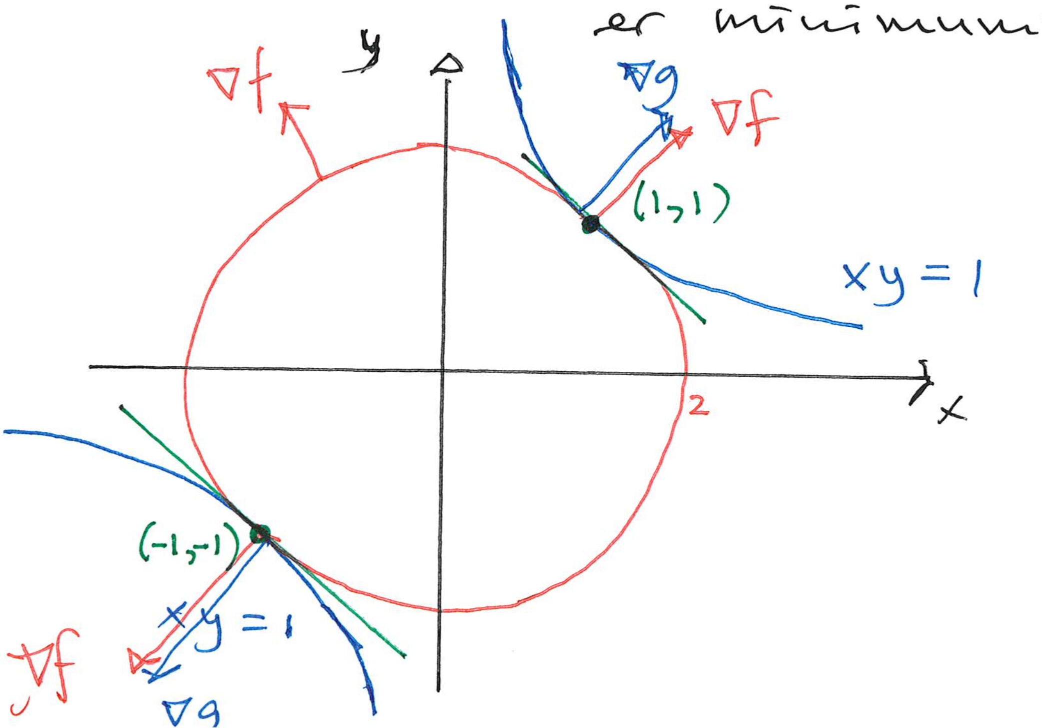
dvs $-x^2 = 1$

dvs $x^2 = -1$

$\underline{\text{ingen løsn.}}$

$f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$ og $f(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$

så $f_{min} = 2$. og både $(1,1)$ og $(-1,-1)$ er minimumspunkter.



$xy = 1$

dvs $y = \frac{1}{x}$

- en hyperbel