Lagrangeproblemer med parameter
– hva skjer hvis vi endrer a litt?

EKS Min $\underbrace{4x^2+9y^2}_{f(x,y)}$ når $\underbrace{2x+3y}_{g(x,y)} = \underbrace{6}_{a}$

Løser likningene

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 6 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 8x = 2\lambda & :2 \\ 18y = 3\lambda & :3 \text{ gir} \\ 2x+3y = 6 & (\text{III}) \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = 4x \\ \lambda = 6y \end{matrix}$$

så $4x = 6y$ dvs $x = \frac{3y}{2}$ setter inn i (III):

$2 \cdot \frac{3y}{2} + 3y = 6$ dvs $6y = 6$ så $\underline{y = 1}$

og $x = \frac{3 \cdot 1}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$ og $\lambda = 4 \cdot \frac{3}{2} = \underline{6}$

så $\underline{(\frac{3}{2}, 1; 6)}$ er eneste kandidatpunkt.

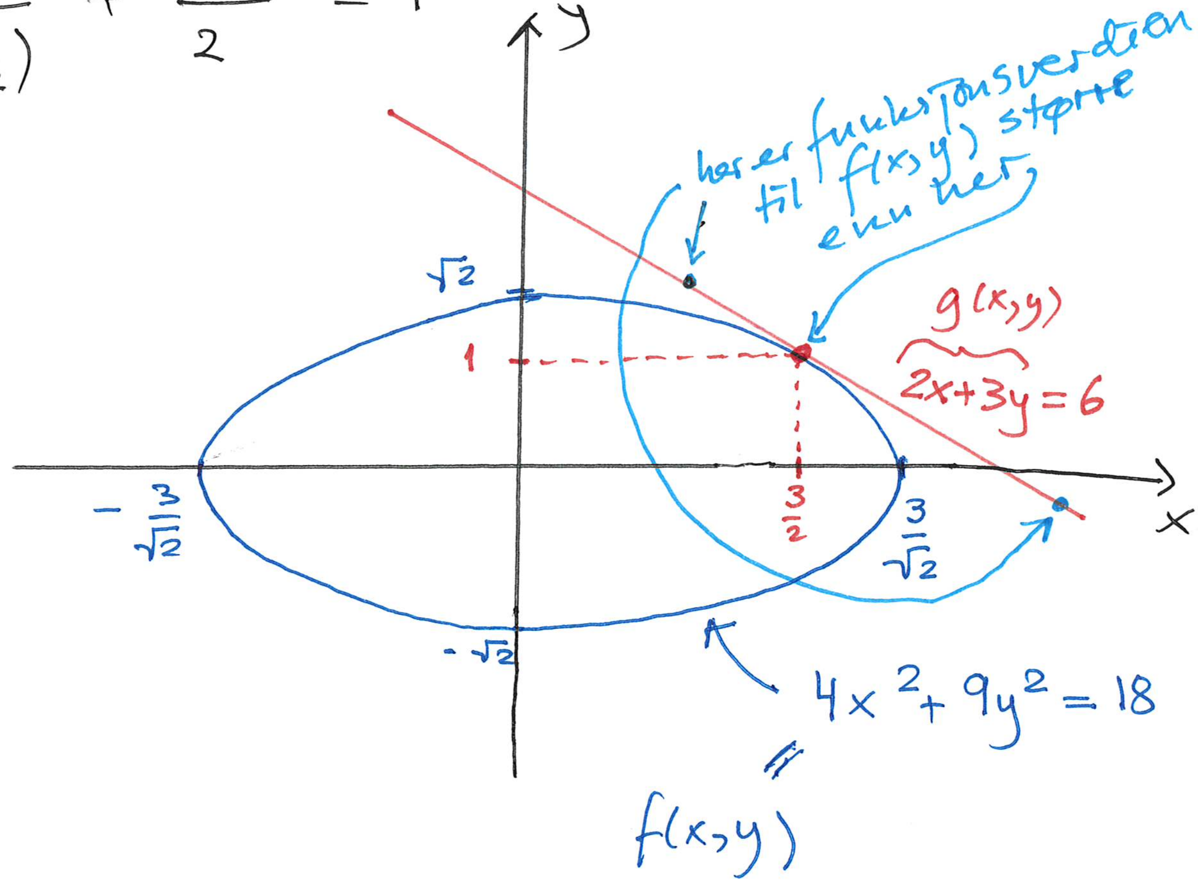
(Degenerert bibetingelse: $\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g = 6 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} 2 = 0 \\ 3 = 0 \\ 2x+3y = 6 \end{cases}$
– ingen løsn.)

$2x+3y=6$ er en linje som ubegrenset,
så $\underline{\text{ikke}}$ kompakt.

Sjekker $f(\frac{3}{2}, 1) = 4 \cdot (\frac{3}{2})^2 + 9 \cdot 1^2 = 9 + 9 = 18$

$$4x^2 + 9y^2 = 18 \quad \Big| : 18$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{9}{2}\right)} + \frac{y^2}{2} = 1$$



Funksjonsverdien til $f(x,y)$ øker uten grenser i punkter (x,y) på $2x+3y=6$ når $x \to \pm\infty$ vekk fra $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Så $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ gir minimum til Lagrangeproblemet, så

$$\underline{\underline{f_{min}(a=6) = 18}}$$

Vi kan finne $f_{min}(a=8)$ ved å bruke $\lambda = 6$.

$$f_{min}(a=8) \approx f_{min}(a=6) + \underbrace{6}_{\substack{= \lambda \\ (\text{for } a=6)}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{= 8-6 \\ = \text{endring i } a}} = 18+12=30$$

= minimumsverdien til $f(x,y)$ når $g(x,y) = 2x+3y = 8$

Hvorfor stemmer dette i dette eksempelet?

Gjør problemet for $g(x,y) = a$ ← en parameter

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = a \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 8x = 2\lambda \\ 18y = 3\lambda \\ 2x+3y = a \quad (\text{III}) \end{cases}$$

Får $x = \frac{3y}{2}$ setter inn i (III):

$$2 \cdot \frac{3y}{2} + 3y = a \quad \text{dvs} \quad 6y = a$$

så $y = \frac{a}{6}$ og $x = \frac{3\frac{a}{6}}{2} = \frac{a}{4}$

$$\lambda = 4 \cdot \frac{a}{4} = a$$

så $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{6}; a\right)$ gir minimum

$$f_{min}(a) = f\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{6}\right) = 4\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 9\cdot\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \cancel{4}\cdot\frac{a^2}{4^{\cancel{2}}} + \cancel{9}\cdot\frac{a^2}{\cancel{6^2}_{4}}$$

3

så $f_{min}(a) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

f.eks. $f_{min}(6) = \frac{6^2}{2} = 18$

og $f_{min}(8) = \frac{8^2}{2} = 32$ (ikke 30).

$$f_{min}(a+h) \approx f_{min}(a) + f'_{min}(a) \cdot h$$

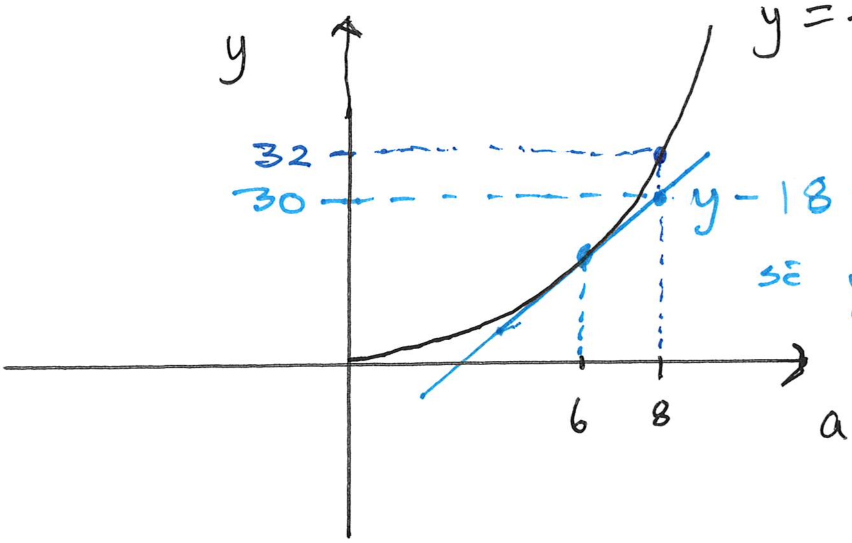
$$= \frac{a^2}{2} + a \cdot h$$

Første ordens Taylor polynom for $f_{min}(a)$ = lineær approksim.

$$f_{min}(6+h) \approx 18 + 6h$$

$$f_{min}(6+2) \approx 18 + 6 \cdot 2 = 30$$

$y = f_{min}(a) = \frac{a^2}{2}$



$y - 18 = 6(a-6)$

så $y = 6a - 18$

Start: 11.03

$$f_{min}(7) = f_{min}(6+1) \approx 18 + 6 \cdot 1 = 24$$

riktig: $7^2/2 = 24{,}5$

$$f_{min}(5) = f_{min}(6-1) \approx 18 + 6 \cdot (-1) = 12$$

riktig: $5^2/2 = 12{,}5$

EKS (oppg 1/2 d fra forrige uke)

$g(x,y)$

maks/min $f(x,y) = 4x^2+9y^2$ når $\overset{\shortparallel}{xy} = 6$

Lagrange likninger:

$$\begin{cases} 8x = \lambda y & (\mathrm{I}) \\ 18y = \lambda x & (\mathrm{II}) \\ xy = 6 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

gir $x \overset{(\mathrm{IV})}{=} \dfrac{\lambda y}{8}$ innsatt: $18y = \lambda \cdot \dfrac{\lambda y}{8}$ dvs

$y = \dfrac{6}{x}$
- hyperbel
- ubegrenset

$$18\cdot 8\, y = \lambda^2 y \quad \text{dvs} \quad (18\cdot 8 - \lambda^2)\,y = 0$$

Enten $\underline{y=0}$ som gir (ved I) $8x = \lambda\cdot 0 = 0$
$\underline{x = 0}$

Men (III) gir $0\cdot 0 = 6$ – så ingen løsning

Eller $\lambda^2 = 18\cdot 8 = 2\cdot 9\cdot 8 = 9\cdot 16$

så $\lambda = \pm 3\cdot 4 = \underline{\pm 12}$.

$\underline{\lambda = -12}$: Da er (IV) $x = \dfrac{-12y}{8} = -\dfrac{3y}{2}$

innsatt i (III): $\left(-\dfrac{3y}{2}\right)\cdot y = 6$ dvs $y^2 = -4$
<u>– ingen løsning</u>

$\underline{\lambda = 12}$ Da er (IV) $x = \dfrac{12y}{8} = \dfrac{3y}{2}$

innsatt i (III) $\dfrac{3y}{2}\cdot y = 6$ så $y^2 = 4$

dvs $y = \pm 2$ og $x = \dfrac{12\cdot(\pm 2)}{8} = \pm 3$

Så $(-3, -2 ; 12)$ og $(3, 2 ; 12)$ er kandidatpunkter.

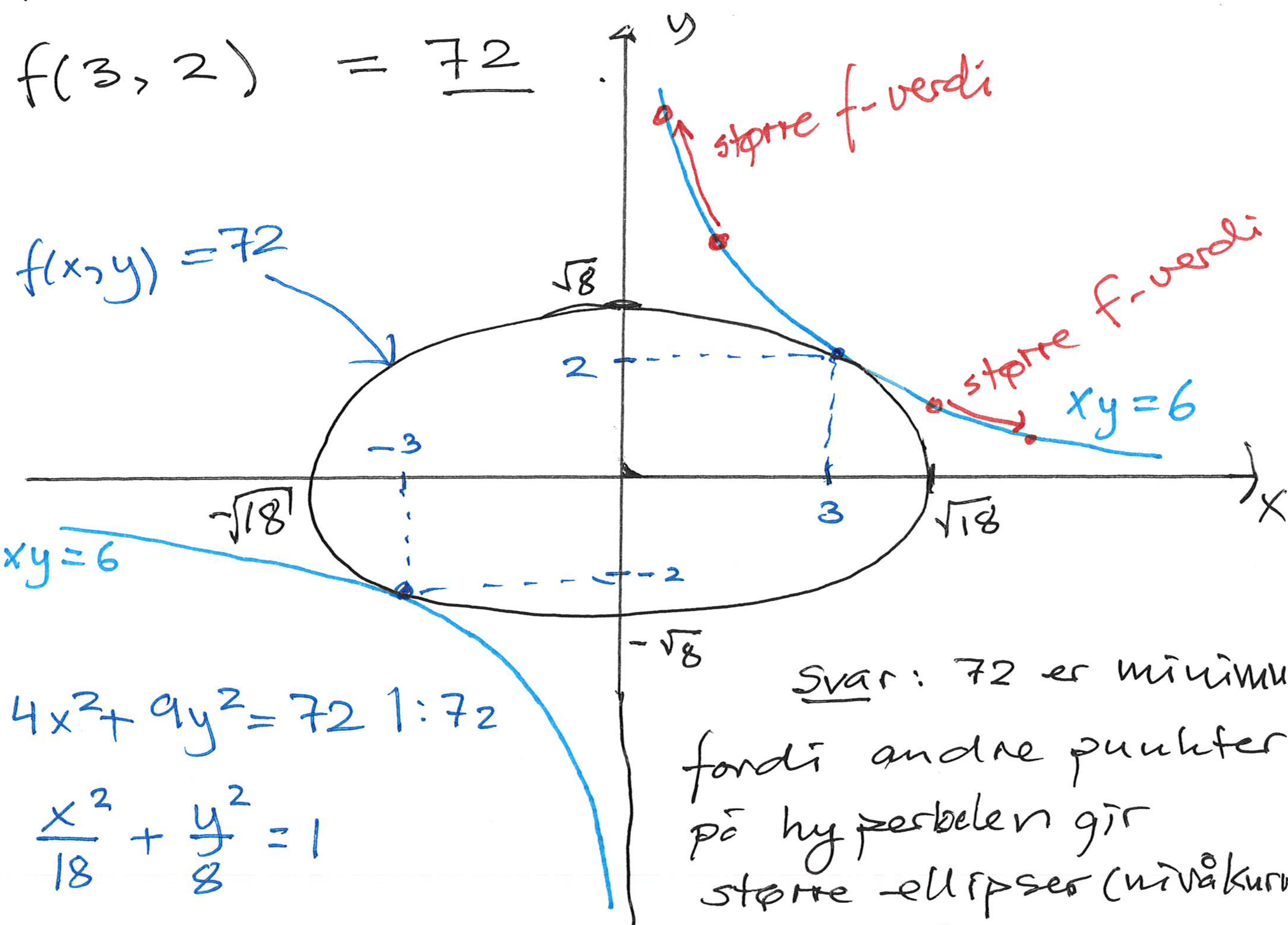
NB: Bibetingelsen har ikke degenerte punkter:

fordi $\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g = 6 \end{cases}$ ikke har løsninger: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ xy = 6 \end{cases}$

Maks. eller min?

$$f(-3,-2) = 4\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-2)^2 = 4\cdot 9 + 9\cdot 4 = \underline{72}$$

$$f(3,2) = \underline{72}$$



$$4x^2 + 9y^2 = 72 \quad | :72$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

halvakser: $\sqrt{18}$ og $\sqrt{8}$

Svar: 72 er minimum fordi andre punkter på hyperbelen gir større ellipser (nivåkurver) dvs at f blir større enn 72.

NB: $f(x,y)$ kan bli vilkårlig stor når $xy = 6$ fordi nivåkurvene blir større og større ellipser som skjærer hyperbelen i 4 punkter, så ingen løsning på maksimumsproblemet (= ikke noe maksimum)

Hva skjer med minimumsverdien 72 hvis vi endrer $\underset{\shortparallel}{xy = 6}$ til $xy = 8$?
a

$$f_{min}(8) \approx f_{min}(6) + \underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda}}{12} \cdot 2$$

" endring fra 6 til 8

$$f_{min}(8) \approx 72 + 24 = \underline{96}$$

Oppg $f_{min}(5) \simeq 72 + 12 \cdot (-1) = \underline{60}$

(minimum til $f(x,y)$ når $xy = 5$)