MET 1180, forelesning 7, 14. sept. 2023, Runar Ile

Plan
1. Kvadratiske likninger
2. Fullføre kvadratet
3. Likninger med gitte løsninger

1. Kvadratiske likninger

- en likning som kan omformes til standardformen $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Har løsning(er)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tre tilfeller:

$b^2 - 4ac > 0$ gir to løsninger

$b^2 - 4ac = 0$ gir én løsning

$b^2 - 4ac < 0$ gir ingen løsninger

Oppg Bestem antall løsninger.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$: to løsninger

b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ $\quad 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$: én løsning

c) $4x^2 - 5x - 5 = 0$ $\quad (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) > 0$: to løsninger

Men abc-formelen er ofte ineffektiv:

Eks $-3x^2 + 7 = 0$ $\quad (a = -3,\ b = 0,\ c = 7)$

$$-3x^2 = -7 \quad | : -3$$

$$x^2 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \quad \text{så} \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Eks $\quad 2x^2 - 6x = 0 \qquad (a=2,\ b=-6,\ c=0)$

$2(x^2-3x) = 0 \qquad |:2$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$ så er $\underline{\underline{x=0}}$ eller $x-3=0$

$\underline{\underline{x=3}}$

Mønster: Hvis $a \cdot b = 0$ så er $a=0$ eller $b=0$ (eller begge $=0$)

---

2. Fullføre kvadratet

Eks $\quad x^2 + 6x - 16 = 0$

Påstand: $x^2+6x = (x+3)^2 - 9$

– fordi $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$

$= x^2 + 6x + 9$

$6:2 \qquad 3^2$

$(x+3)^2 - 9 - 16 = 0$

$(x+3)^2 = 25$

Så $x+3 = 5$ eller $x+3 = -5$

$\underline{\underline{x=2}} \qquad \underline{\underline{x=-8}}$

Oppg Løs andregradslikningene ved å fullføre kvadratet.

a) $x^2 - 8x - 33 = 0$

Løsning $\frac{-8}{2} = -4$ så $x^2 - 8x = (x-4)^2 - (-4)^2$

(fordi $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + (-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

Skriver om likn: $(x-4)^2 - 16 - 33 = 0$ dvs $(x-4)^2 = 49$

Så $x-4 = 7$ eller $x-4 = -7$

$\underline{\underline{x=11}} \qquad \underline{\underline{x=-3}}$

b) $x^2 + 2x = 63$ $\quad | + 1$

Løsning $(x+1)^2 = 63 + 1 = 64$ så

$x + 1 = 8$ eller $x + 1 = -8$

$\underline{\underline{x = 7}}$ $\quad$ $\underline{\underline{x = -9}}$

Start: 9.00

3. Likninger med gitte løsninger

Oppg Løs likningen $(x-4)(x+5) = 0$

Løsning Hvis produktet av to tall er lik 0:

$a \cdot b = 0$

så må minst ett av tallene være lik 0:

$a = 0$ eller $b = 0$

Så, hvis $(x-4)\cdot(x+5) = 0$ må

enten $x - 4 = 0$ eller $x + 5 = 0$

$\underline{\underline{x = 4}}$ $\quad$ $\underline{\underline{x = -5}}$

Oppg Bestem andregradsuttrykket $x^2 + bx + c$ med de oppgitte røttene (nullpunktene)

a) 1 og 2 Løsning: $(x-1)(x-2) = \underline{\underline{x^2 - 3x + 2}}$

b) 11 og -3 Løsning: $(x-11)(x+3) = \underline{\underline{x^2 - 8x - 33}}$

Merk $3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 9x + 6$ har de samme røttene: 1 og 2

<u>Mønster</u> Hvis r_1 og r_2 er løsninger („røtter") til likningen $x^2 + bx + c = 0$

så vil $(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - r_2 x - r_1 x + (-r_1)(-r_2)$

$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \quad = \quad x^2 + bx + c$

gir $b = -(r_1 + r_2)$ og $c = r_1 r_2$

<u>Eks</u> $x^2 + 6x - 16 = (x+8)(x-2)$ $\quad r_1 = -8$, $r_2 = 2$

<u>Oppg</u> Løs likningen

$(x^2+1)(12+3x)(9-x^2)(x^2-3x+2) = 0$

Et produkt som er 0 : En av faktorene er 0

$x^2 + 1 = 0$ – ingen løsninger

el. $12 + 3x = 0$, $3(4+x) = 0$ så $\underline{\underline{x = -4}}$

el. $9 - x^2 = 0$, $(3-x)(3+x) = 0$ så $\underline{\underline{x = 3}}$ el. $\underline{\underline{x = -3}}$

el. $x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$ så $\underline{\underline{x = 1}}$ el $\underline{\underline{x = 2}}$

<u>Oppg</u> Løs likningen $x^4 - 12x^3 + 11x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 12x + 11) = 0$ så enten

$x^2 = 0$ el. $x^2 - 12x + 11 = 0$: $(x-6)^2 = 36 - 11 = 25$

$\underline{\underline{x = 0}}$ $\quad (x-1)(x-11) = 0$ $\quad x - 6 = \pm 5$

$\underline{\underline{x = 1}}$ el. $\underline{\underline{x = 11}}$ $\quad$ så $x = 6 \pm 5$

så $\underline{\underline{x = 11}}$ el $\underline{\underline{x = 1}}$