MET 1180, forelesning 8, 19. sept. 2023, Runar Ile

Plan 1. Repetisjon (oppgaver fra forrige uke)
2. Polynom divisjon og faktorisering

1. Repetisjon

2m) Løs likningen $9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad | :9$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

Fullfører kvadratet: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} = 0$

så $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$ så $x - \frac{1}{3} = 0$ så $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

Alternativ løsning: $u = 3x$ gir $u^2 = 3x \cdot 3x = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$

og $-6x = -2u$.

Likningen blir
$$u^2 - 2u + 1 = 0$$
$$(u-1)^2 = 0$$
så $u - 1 = 0$

så $3x = u = 1$

så $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

3e) Bestem andregradslikningen med løsningene $x = 3 \pm \sqrt{5}$,

dvs $x = 3 + \sqrt{5}$, $x = 3 - \sqrt{5}$, Da har vi $\left(x-(3+\sqrt{5})\right)\cdot\left(x-(3-\sqrt{5})\right)$

$$= x^2-(3-\sqrt{5})x-(3+\sqrt{5})x+(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$$

$$= x^2-6x+4$$

Så likningen $x^2-6x+4=0$ har de oppgitt løsningene $(b=-6\,,\ c=4)$

5c) Bestem k slik at

$\frac{1}{k}\cdot x^2-14x=12$ har akkurat én løsning.

Merk: $k\neq 0$. Multipliserer b.s. med k:

$$x^2-14kx=12k \qquad \mid +(7k)^2$$

Fullfører kvadratet: $(x-7k)^2=12k+(7k)^2$

har akkurat én løsning hvis og bare hvis

h.s. $=0$, dvs $12k+49k^2=0$

dvs $k(12+49k)=0$

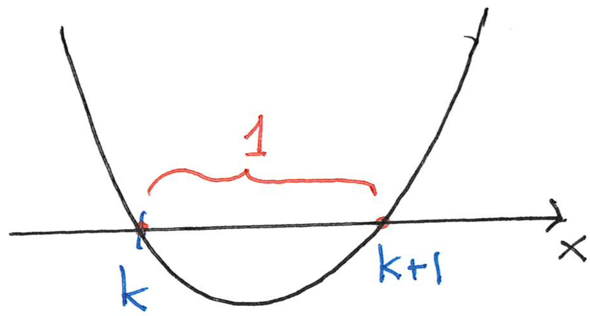
dvs $k=0$ eller $12+49k=0$

ikke gyldig! dvs $k=-\frac{12}{49}$

Parametre Tall som ikke er spesifiserte, som kommer „utenifra", skal ikke løses med likningen.

økonomene kaller parametre for „eksogene variabler" (og x-ene kaller de for „endogene variabler")

Oppg 7a) Alle polynomer $x^2 + bx + c$ som har to røtter med avstand 1 til hverandre kan skrives som

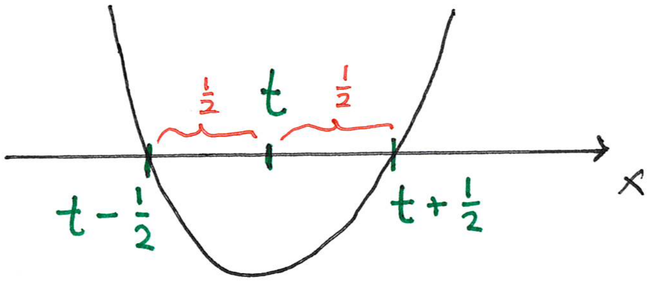


$$(x-k)\cdot(x-(k+1))$$

$$= \underline{\underline{x^2 - (2k+1)x + k(k+1)}}$$

for en parameter k (et tall på tallinjen)

<u>Alternativ løsning</u>



Får

$$\left(x - \left(t - \tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(x - \left(t + \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 2tx + t^2 - \tfrac{1}{4}}}$$

Start : 15.01

Faktisk uendelig mange korrekte løsninger....

<u>2. Polynomdivisjon og faktorisering</u>

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et polynom $g(x)$ med (evt.) restledd $r(x)$.

$$g(x)\cdot \Big| \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{med } \operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(g(x))$$

gir $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$

Eks $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ og $g(x) = x - 2$

$$\left(\boxed{3x^2} + 2x + 1\right) : \left(\boxed{x} - 2\right) = \underbrace{3x}_{3x^2 : x} + \underbrace{8}_{8x : x} + \frac{17}{x-2}$$

$$
\begin{array}{l}
-\left(3x^2 - 6x\right) \quad \cdot(x-2) \\
\hline
\quad \boxed{8x} + 1 \\
\quad -\left(8x - 16\right) \quad \cdot(x-2) \\
\hline
\quad\quad 17
\end{array}
$$

17 kalles resten

Så $q(x) = 3x + 8$ og $r(x) = 17$.

<u>Kan sjekke regningen</u> $\left(3x + 8 + \frac{17}{x-2}\right) \cdot (x-2)$

$= (3x+8)(x-2) + \frac{17}{\cancel{(x-2)}} \cdot \cancel{(x-2)}$

$= 3x^2 - 6x + 8x - 16 + 17 = 3x^2 + 2x + 1 = f(x)$

– så ok!

To anvendelser av polynomdivisjon

Ⓐ Å finne asymptoter til rasjonale funksjoner

Eks $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 2} = 3x + 8 + \frac{17}{x-2}$

har vertikal asymptote: linjen $x = 2$

og en skrå asymptote: $y = 3x + 8$

(B) Å faktorisere et polynom i et produkt av grad 1 (lineære) polynomer.

<u>Eks</u> Faktorisér $x^3-4x^2-11x+30$ i lineære faktorer.

<u>Løsning</u> Tre steg.

<u>Steg 1</u> Gjetter på en heltallsrot (må være en divisor i 30)

Jeg prøver $\underline{x=-3}$ og får

$$(-3)^3-4\cdot(-3)^2-11\cdot(-3)+30$$
$$=-27-36+33+30=0$$

Da er $(x-(-3))=(x+3)$ en faktor.

<u>Steg 2</u> Bruker polynomdivisjon til å finne et polynom av 1 grad lavere

$$(x^3-4x^2-11x+30):(x+3)=x^2-7x+10$$

ved polynomdiv.

Merk: resten $=0$

<u>Steg 3</u> Finner røttene til $x^2-7x+10$.

De er $x=2$, $x=5$, så $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

Dermed er $x^3-4x^2-11x+30=\underline{\underline{(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}}$

<u>Merk1</u> Ikke alltid mulig å faktorisére. Eks: x^2+5, x^2+2x+3

$b^2-4ac=-8$

<u>Merk2</u> Det kan være vanskelig å gjette på røtter. Noen ganger er det ikke heltallsrøtter.