

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 11-12

Kap 3.6-8: Monotoni. Sirkler og ellipser. Polynomfunksjoner.

[L] 3.6.1-3

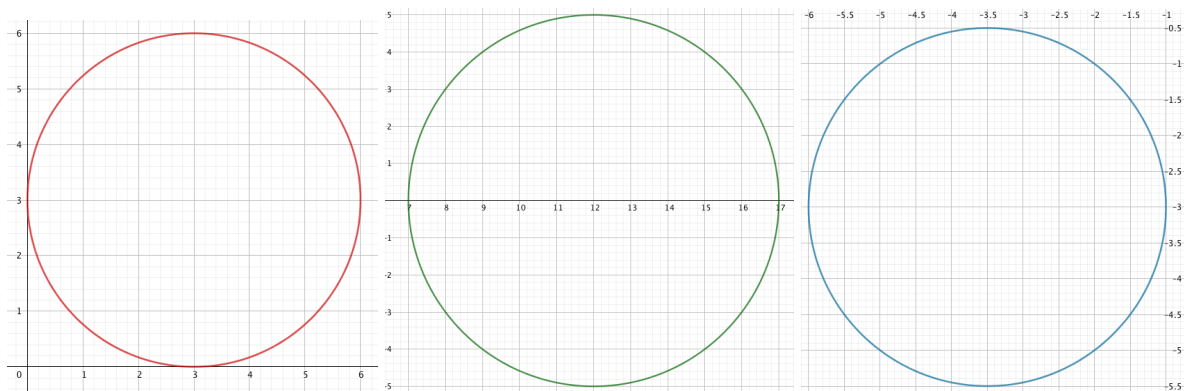
Flervalgseksamen 2018v oppg 7

[L] 3.7.1-3

[L] 3.8.1-4

Oppgaver for veiledningstimen torsdag 5/10 kl 10-13.45 i D1-065/70

Oppgave 1 Finn likningene til sirklene i figur 1.



Figur 1: Sirkler a-c

Oppgave 2 Bestem sentrum S og radius r til sirklene.

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 3$

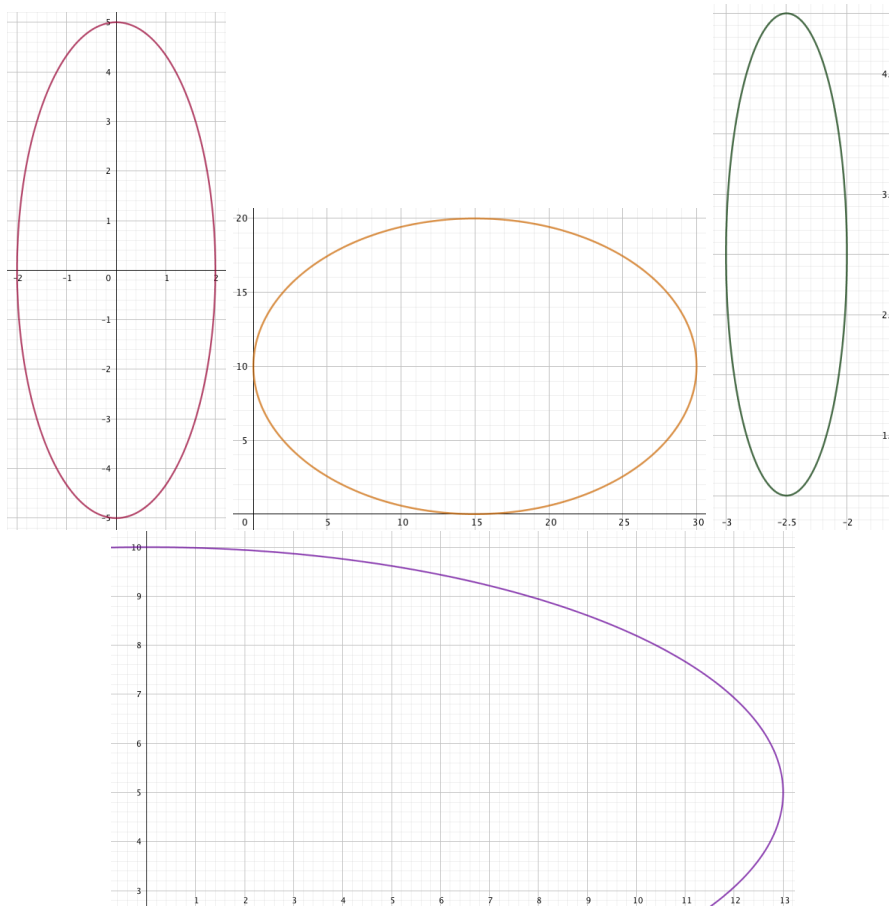
c) $(3x - 2)^2 + (3y - 4)^2 = 9$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 10y = -25$

e) $x^2 + y^2 + 6x - 12y = -44$

f) $25x^2 + 25y^2 - 20x - 30y = -12$

Oppgave 3 Finn likningene til ellipsene i figur 2.



Figur 2: Ellipser a-d

Oppgave 4 Bestem sentrum S og halvaksler til ellipsen. Tegn en skisse av ellipsen.

- a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ c) $16(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 144$
- d) $\frac{x^2}{2} + y^2 - 6y = -8$ e) $9x^2 + 18x + 4y^2 = 27$ f) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$
- g) $25x^2 + 4y^2 - 100x - 40y = -100$

Oppgave 5 Finn elementære argumenter for at:

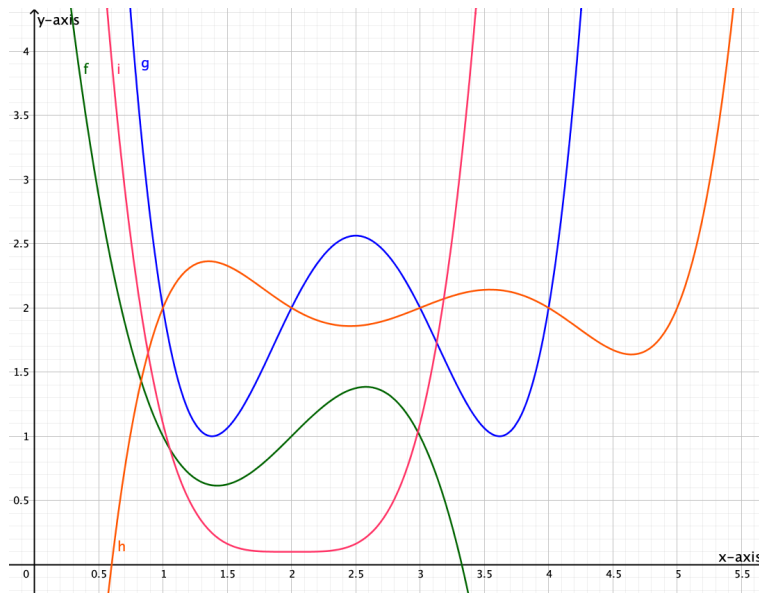
- a) $f(x) = x^2$ med $x \geq 0$ er strengt voksende
 b) $f(x) = \sqrt{x}$ er strengt voksende
 c) $f(x) = \frac{1}{x}$ med $x > 0$ er strengt avtagende

Oppgave 6 Finn skjæringspunktene mellom

- a) linjen $3x + 2y = 12$ og linjen $-3x + 2y = -6$
 b) linjen $2x + y = 6$ og ellipsen i oppgave 4a

Oppgave 7 Avgjør hvilke uttrykk (under) og grafer (i figur 3) som hører sammen.

- 1) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + \frac{161}{10}$
 2) $\frac{x^5}{10} - \frac{3x^4}{2} + \frac{17x^3}{2} - \frac{45x^2}{2} + \frac{137x}{5} - 10$
 3) $-x^3 + 6x^2 - 11x + 7$
 4) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 26$



Figur 3: Grafene til fire polynomfunksjoner

Fasit

Oppgave 1

a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

b) $(x - 12)^2 + y^2 = 25$

c) $(x + 3,5)^2 + (y + 3)^2 = 6,25$

Oppgave 2

a) $S = (3, 4), r = \sqrt{5}$

b) $S = (-1, 0), r = \sqrt{3}$

c) $S = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), r = 1$

d) $S = (2, 5), r = 2$

e) $S = (-3, 6), r = 1$

f) $S = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), r = \frac{1}{5}$

Oppgave 3

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

b) $\frac{(x-15)^2}{225} + \frac{(y-10)^2}{100} = 1$

c) $4(x + 2,5)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

d) $\frac{x^2}{169} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Oppgave 4

a) $S = (0, 0)$, halvaksler $a = 3, b = 4$

b) $S = (1, 2)$, halvaksler $a = 3, b = 4$

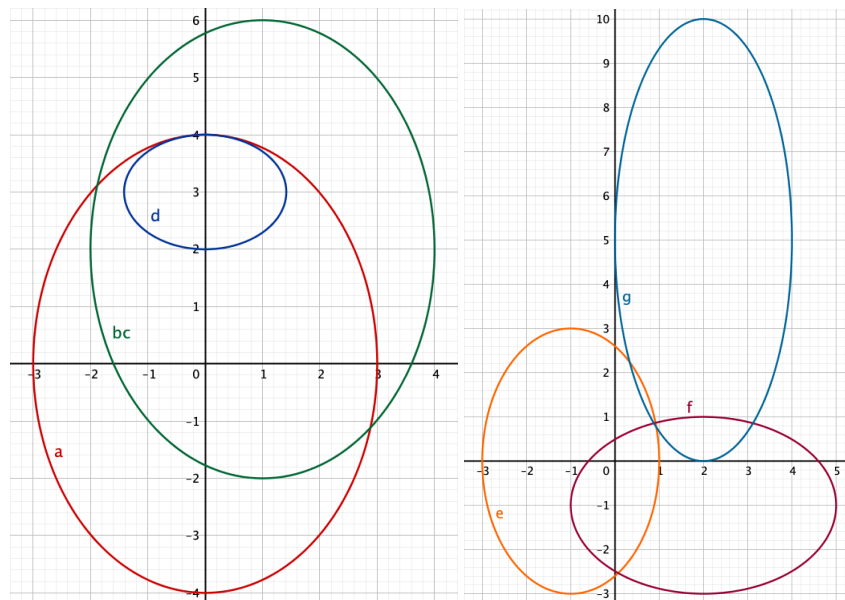
c) $S = (1, 2)$, halvaksler $a = 3, b = 4$

d) $S = (0, 3)$, halvaksler $a = \sqrt{2}, b = 1$

e) $S = (-1, 0)$, halvaksler $a = 2, b = 3$

f) $S = (2, -1)$, halvaksler $a = 3, b = 2$

g) $S = (2, 5)$, halvaksler $a = 2, b = 5$



Figur 4: Ellipser a-d og e-g

Oppgave 5

a) Anta $0 \leq x_1 < x_2$. Da er $x_2 = x_1 + k$ for en positiv konstant k . Da er $f(x_2) = (x_1 + k)^2 = x_1^2 + 2kx_1 + k^2$. Sum og produkt av to positive tall er positive tall. Derfor er $2kx_1 + k^2$ et positivt tall. Altså er $f(x_1) = x_1^2 < x_1^2 + 2kx_1 + k^2 = f(x_2)$ og $f(x) = x^2$ for $x \geq 0$ er strengt voksende.

b) Vi deler begge sider av ulikheten $x_1 < x_2$ med det positive tallet x_2 og får den ekvivalente ulikheten $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Kvadratrotten av et tall som er mindre enn 1 er selv mindre enn 1, dvs $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1$. Men $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$. Vi får ulikheten $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} < 1$ og når vi multipliserer hver side med det positive tallet $\sqrt{x_2}$ får vi ulikheten $f(x_1) = \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} = f(x_2)$. Altså er $f(x) = \sqrt{x}$ strengt voksende.

c) Vi deler begge sider av ulikheten $x_1 < x_2$ med det positive tallet x_2 og får den ekvivalente ulikheten $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Så deler vi denne ulikheten med det positive tallet x_1 og får

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} = f(x_1). \text{ Altså er } f(x) = \frac{1}{x} \text{ for } x > 0 \text{ strengt avtagende.}$$

Oppgave 6

a) $(3, \frac{3}{2})$

b) $(3, 0)$ og $(\frac{15}{13}, \frac{48}{13})$

Oppgave 7

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 7$$

$$g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 26$$

$$h(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{3x^4}{2} + \frac{17x^3}{2} - \frac{45x^2}{2} + \frac{137x}{5} - 10$$

$$i(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + \frac{161}{10}$$