

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 21 – 22

Kap 4.8-9: l'Hôpitals regel. Grenseinntekt og grensekostnad.

[L] 4.8 1-2
[L] 4.9 1-2, 5-6

Flervalgseksamen 2016v oppg 13
Flervalgseksamen 2016h oppg 14
Flervalgseksamen 2018v oppg 12

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 9/11 fra 10 i D1-065/70

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x}{25(x-1)}$	b) $\lim_{x \rightarrow \ln 5} \frac{e^x - 5}{x^2 - 5}$	c) $\lim_{x \rightarrow \ln 5} \frac{e^x - 5}{x^2 - (\ln 5)^2}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{e^x - 1}$	e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{e^x - 1}$	f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$
g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{e^{2x} - e^2}$	h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1}$	i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2 - 3x + 2} - 1}{x^2 - 4}$

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{25(x-1)}$	b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{2x-2}$	c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 10}{e^x - 5}$	d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$
---	---	--	---

Oppgave 3 Forklar hvorfor $K(x)$ er en kostnadsfunksjonen ved å sjekke de tre kriteriene:

- (1) $K(0) > 0$
- (2) $K(x)$ er en voksende funksjon
- (3) $K(x)$ er en konveks funksjon

Bestem også konstandsoptimum og hva enhetskostnaden er ved kostnadsoptimum.

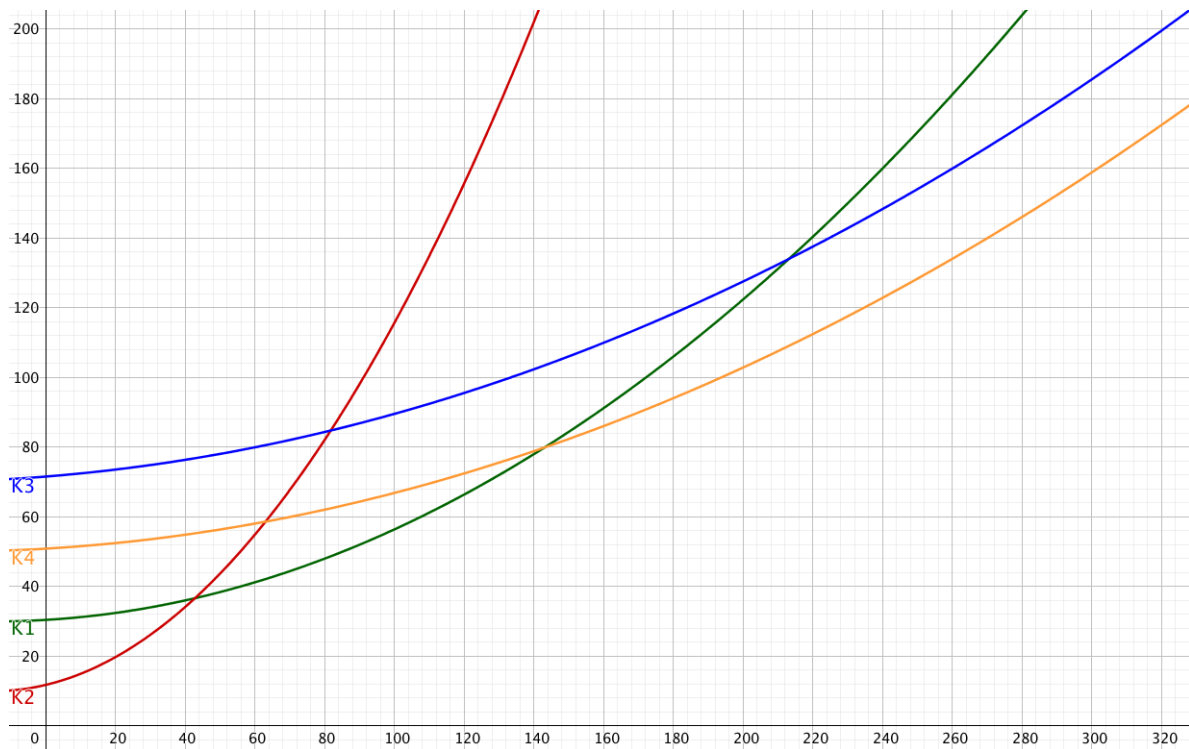
a) $K(x) = 0,01x^2 + 8x + 2500, x \geq 0$	b) $K(x) = 0,05(x + 200)^2, x \geq 0$
c) $K(x) = 400e^{0,001x^2}, x \geq 0$	d) $K(x) = 50x + 1000, 0 \leq x \leq 1000$

Oppgave 4 $K(x)$ er kostnadsfunksjonen, $I(x)$ er inntektsfunksjonen og x er antall produserte og solgte enheter. Finn profittmaksimerende kvantum.

- $K(x) = 0,01x^2 + 8x + 2500$ og $I(x) = 100x$ for $x \geq 0$
- $K(x) = 0,005x^2 + 20x + 30000$ og $I(x) = 50x$ for $0 \leq x \leq 2000$

Oppgave 5 I figur 1 ser du grafen til fire forskjellige kostnadsfunksjoner.

- Lage en rekkefølge av kostnadsfunksjonene fra den med minste optimale (minimale) enhetskostnad til den med største optimale enhetskostnad.
- Finn en tilnærmet verdi for kostnadsoptimum for hver av kostnadsfunksjonene.
- Finn en tilnærmet verdi for optimal (minimal) enhetskostnad for hver av kostnadsfunksjonene.



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner (K_1 – K_4)

Oppgave 6 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)

En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = 205x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800$ når $x \geq 0$. Hva er den minimale enhetskostnaden?

- 2 kr
- 12 kr
- 3980 kr
- 7960 kr
- Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 7 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)

Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x \ln(x)}{e^x}$$

Hvilket utsagn er sant?

- Grenseverdien eksisterer ikke
- Grenseverdien er 1
- Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
- Grenseverdien er 0
- Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)

Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Hvilket utsagn er sant?

- (A) Grenseverdien eksisterer ikke
- (B) Grenseverdien er 0
- (C) Grenseverdien er 1
- (D) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2018h, oppg 14)

Vi har en kurve definert implisitt ved likningen $4x^2 - 7xy + 4y^2 = 16$. Hvilket utsagn er sant?

- (A) Det finnes bare ett punkt på kurven med x -koordinat 4 og stigningstallet til tangenten i dette punktet er -1
- (B) Det finnes to punkter på kurven med x -koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er $-2,75$
- (C) Det finnes to punkter på kurven med x -koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er -64
- (D) Det finnes to punkter på kurven med x -koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er $\frac{1024}{425}$
- (E) Jeg velger å ikke svare på denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

- | | | |
|---------------------------------|------|-----------------------|
| a) $\frac{-3}{25(3-1)} = -0,06$ | b) 0 | c) $\frac{5}{2\ln 5}$ |
| d) 7 | e) 0 | f) 0,5 |
| g) $\frac{1}{2e^2}$ | h) 2 | i) $\frac{1}{4}$ |

Oppgave 2

- | | | | |
|--------------------|------------------|--|------|
| a) $\frac{-1}{25}$ | b) $\frac{1}{2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$ | d) 0 |
|--------------------|------------------|--|------|

Oppgave 3

- a) $K(0) = 2500 > 0$, $K'(x) = 0,02x + 8 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geq 0$, $K''(x) = 0,02 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geq 0$. Kostnadsoptimum $x = 500$ gir minimal enhetskostnad $A(500) = 18$
- b) $K(0) = 2000 > 0$, $K'(x) = 0,1x + 20 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geq 0$, $K''(x) = 0,1 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geq 0$. Kostnadsoptimum $x = 200$ gir minimal enhetskostnad $A(200) = 40$
- c) $K(0) = 400 > 0$, $K'(x) = 0,8xe^{0,001x^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geq 0$, $K''(x) = 0,8(1 + 0,002x^2)e^{0,001x^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geq 0$. Kostnadsoptimum $x = 22,36$ gir minimal enhetskostnad $A(22,36) = 29,49$
- d) $K(0) = 1000 > 0$, $K'(x) = 50 > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geq 0$, $K''(x) = 0 \geq 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geq 0$. Kostnadsoptimum $x = 1000$ gir minimal enhetskostnad $A(1000) = 51$

Oppgave 4

- a) For $x = 4600$ er grensekostnad lik grenseinntekt og $\pi''(x) = -0,02 < 0$ gir at profittfunksjonen er konkav og dermed er $x = 4600$ et profittmaksimerende kvantum.
- b) For $x = 3000$ er grensekostnad lik grenseinntekt, men dette ligger utenfor gyldighetsområdet (definisjonsområdet) for modellen. Vi ser at $\pi'(x) = 30 - 0,01x$ er positiv for $x < 3000$ som gir at profittfunksjonen er voksende for x i intervallet $[0, 2000]$ og dermed er $x = 2000$ et profittmaksimerende kvantum.

Oppgave 5

- a) K_4, K_1, K_3, K_2
- b) $K_4 : x = 220$, $K_1 : x = 120$, $K_3 : x = 270$, $K_2 : x = 40$
- c) $A_4(220) = \frac{112}{220} = 0,51$, $A_1(120) = \frac{65}{120} = 0,54$, $A_3(270) = \frac{165}{270} = 0,61$, $A_2(40) = \frac{35}{40} = 0,88$

Oppgave 6 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)

C

Oppgave 7 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)

D

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)

D

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2018h, oppg 14)

B