# MET1180 Matematikk for siviløkonomer
# Vår 2024
## Oppgaver

*... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*

R. Lucas

## Forelesning 27
### Kap 5.5: Oppgaveregning. Integrasjon av rasjonale uttrykk.

### Lærebokoppgaver
[L] 5.5.1-3

### Repetisjonsoppgaver

**Oppgave 1** Bruk *delvis integrasjon* til å beregne de ubestemte integralene.

a) $\int x(x^2+1)\,\mathrm{d}x$  b) $\int x(1+x)^{19}\,\mathrm{d}x$  c) $\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$  e) $\int 5x^4\ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (x>0)$  f) $\int \frac{1}{x^2}\ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (x>0)$

g) $\int 3\sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (x>0)$

**Oppgave 2** Bruk *integrasjon ved substitusjon* til å beregne de ubestemte integralene.

a) $\int \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x$  b) $\int (4x+1)^{1,5}\,\mathrm{d}x$  c) $\int (10x+3)^{4,5}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$  e) $\int \frac{4x^3+10x}{x^4+5x^2+3}\,\mathrm{d}x$  f) $\int e^{10x+3}\,\mathrm{d}x$

g) $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$  h) $\int 3x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x$  i) $\int 3x^2(1+x^3)^7\,\mathrm{d}x$

j) $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$  k) $\int 3x^2\sqrt{x^3+5}\,\mathrm{d}x$  l) $\int 2x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

# Løsningsforslag til ekstraoppgaver

## Oppgave 1

a) Hvis $u'(x) = x$ da er $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ og hvis $v(x) = x^2 + 1$ er $v'(x) = 2x$. Altså er
$\int x(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x =$
$\frac{1}{2}x^2 \cdot (x^2+1) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C}}$. [Merk: Dette integralet kan også beregnes ved å multiplisere ut parantesene og integrere hvert ledd.]

b) Med $u(x) = x$ er $u'(x) = 1$ og hvis $v'(x) = (1+x)^{19}$ er $v(x) = \frac{1}{20}(1+x)^{20}$. Altså er
$\int x(1+x)^{19}\,\mathrm{d}x = \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x =$
$x \cdot \frac{1}{20}(1+x)^{20} - \int 1 \cdot \frac{1}{20}(1+x)^{20}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}x(1+x)^{20} - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{21}(1+x)^{21} + C =$
$\underline{\underline{\frac{1}{20}x(1+x)^{20} - \frac{1}{420}(1+x)^{21} + C}}$. [Merk: Dette integralet kan også beregnes ved å bruke substitusjonen $u = 1 + x$]

c) $u(x) = x + 1$ gir $u'(x) = 1$ og $v'(x) = e^x$ gir $v(x) = e^x$. Altså er
$\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{xe^x + C}}$

d) Med $u(x) = x^2$ er $u'(x) = 2x$ og hvis $v'(x) = e^x$ er $v(x) = e^x$. Altså er
$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - \int 2xe^x\,\mathrm{d}x$. Her har vi nok et integral som må løses med delvis integrasjon:
Hvis $f(x) = 2x$ er $f'(x) = 2$ og hvis $g'(x) = e^x$ da er $g(x) = e^x$. Altså er
$\int 2xe^x\,\mathrm{d}x = 2xe^x - \int 2e^x\,\mathrm{d}x = 2xe^x - 2e^x + K$. Altså e
$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x + K) = \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2)e^x + C}}$ hvor $C = -K$ er en konstant.

e) $u'(x) = 5x^4$ gir $u(x) = x^5$ og $v(x) = \ln(x)$ gir $v'(x) = \frac{1}{x}$. Altså er
$\int 5x^4 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x^5 \cdot \ln(x) - \int x^5 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x^5\ln(x) - \frac{1}{5}x^5 + C}}$

f) $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ gir $u(x) = \frac{-1}{x}$ og $v(x) = \ln(x)$ gir $v'(x) = \frac{1}{x}$. Altså er
$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x} \cdot \ln(x) - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + C}}$

g) $u'(x) = 3\sqrt{x}$ gir $u(x) = 2x^{1,5}$ og $v(x) = \ln(x)$ gir $v'(x) = x^{-1}$. Altså er
$\int 3\sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = 2x^{1,5}\ln(x) - \int 2x^{1,5}x^{-1}\,\mathrm{d}x = 2x^{1,5}\ln(x) - 2\int x^{0,5}\,\mathrm{d}x =$
$2x^{1,5}\ln(x) - \frac{4}{3}x^{1,5} + C = \underline{\underline{x^{1,5}[2\ln(x) - \frac{4}{3}] + C}}$

## Oppgave 2

a) Sett $u(x) = 5x + 1$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{d}x$, dvs. $\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}u$. Altså er
$\int \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{5}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{15}(5x+1)^{1,5} + C}}$

b) Sett $u(x) = 4x + 1$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{d}x$, dvs. $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u$. Altså er
$\int (4x+1)^{1,5}\,\mathrm{d}x = \int u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{10}(4x+1)^{2,5} + C}}$

c) Sett $u(x) = 10x + 3$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 10\,\mathrm{d}x$, dvs. $\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\,\mathrm{d}u$. Altså er
$\int (10x+3)^{4,5}\,\mathrm{d}x = \int u^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{1}{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{11}u^{\frac{11}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{55}(10x+1)^{5,5} + C}}$

d) Sett $u(x) = x^2 + 1$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$. Altså er
$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(u) + C = \underline{\underline{\ln(x^2+1) + C}}$

e) Sett $u(x) = x^4 + 5x^2 + 3$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = (4x^3 + 10x)\,\mathrm{d}x$. Altså er
$\int \frac{4x^3+10x}{x^4+5x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(u) + C = \underline{\underline{\ln(x^4 + 5x^2 + 3) + C}}$

f) Sett $u(x) = 10x + 3$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 10\,\mathrm{d}x$, dvs. $\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\,\mathrm{d}u$. Altså er
$\int e^{10x+3}\,\mathrm{d}x = \int e^u \cdot \frac{1}{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{10}e^{10x+3} + C}}$

g) Sett $u(x) = x^2$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$. Altså er $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C = \underline{\underline{e^{x^2} + C}}$

h) Sett $u(x) = x^3$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Altså er
$\int 3x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C = \underline{\underline{e^{x^3} + C}}$

i) Sett $u(x) = 1 + x^3$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Altså er
$\int 3x^2(1+x^3)^7\,\mathrm{d}x = \int u^7\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}u^8 + C = \underline{\underline{\frac{1}{8}(1+x^3)^8 + C}}$

j) Sett $u(x) = x^2 + 1$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ \mathrm{d}x$. Altså er
$\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^2+1)^{1,5} + C}}$

k) Sett $u(x) = x^3 + 5$. da $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2\ \mathrm{d}x$. Altså er
$\int 3x^2\sqrt{x^3+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}(x^3+5)^{1,5} + C}}$

l) Sett $u(x) = x^2 + 1$. Da er $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ \mathrm{d}x$. Altså er $\int 2x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int \ln(u)\,\mathrm{d}u$. Ved delvis integrasjon [tenk på $\ln(u)$ som et produkt av to funksjoner $1\cdot\ln(u)$] eller ved å se på formelarket, er $\int \ln(u)\,\mathrm{d}u = u\ln(u) - u + C = \underline{\underline{(x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1) + C}}$