MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 29

Oppgaveregning.

Kap 5.6: Bestemte integraler og arealberegninger.

Lærebokoppgaver

[L] 5.6: 3-5
[L] 5.7: 1-2

Eksamensoppgaver

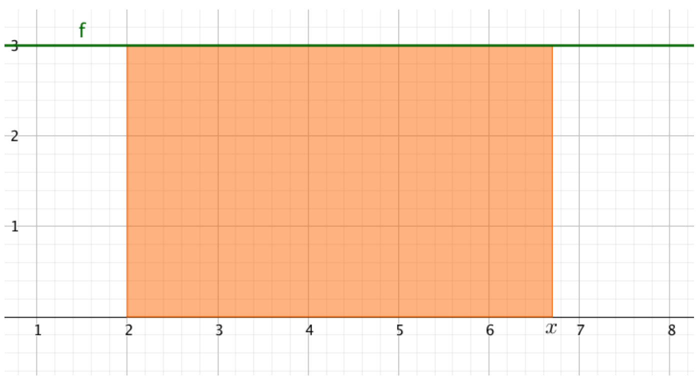
Eksamen MET1180 (Desember 2019) Oppgave 3abc
Regn ut disse integralene:

a) $\displaystyle\int 30x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{6-3x}{4-9x^2}\,\mathrm{d}x$

For fullstendig løsning, se Eksamen MET1180 12/2019, Oppgave 3abc.

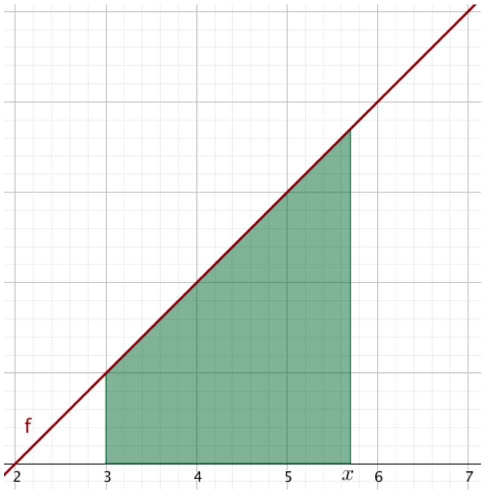
Ekstraoppgaver

Oppgave 1 *Areal og bestemte integraler*
Bestem arealet (ved et elementært argument) under grafen til $f(x) = 3$ (konstantfunksjonen) og mellom de vertikale linjene $x = 2$ og $x = x$ (som vi antar er større enn 2, se figur 1. Beregn det bestemte integralet $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.



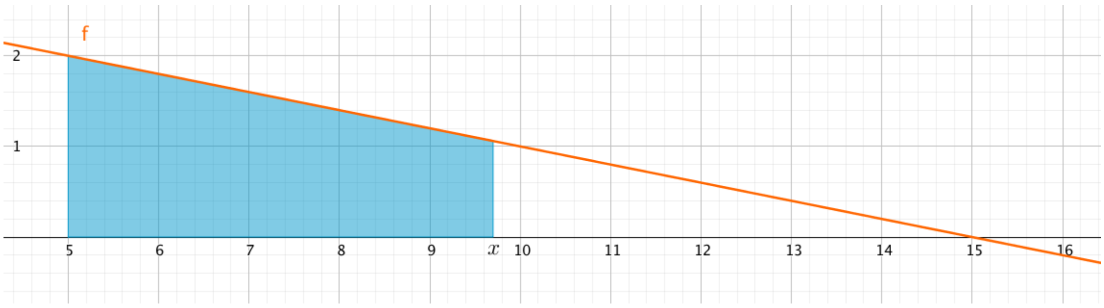
Figur 1: Et areal under grafen til $f(x) = 3$

Oppgave 2 *Areal og bestemte integraler*
Bestem arealet (ved et elementært argument) under grafen til $f(x) = x - 2$ og mellom de vertikale linjene $x = 3$ og $x = x$ (som vi antar er større enn 3, se figur 2. Beregn det bestemte integralet $\int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.



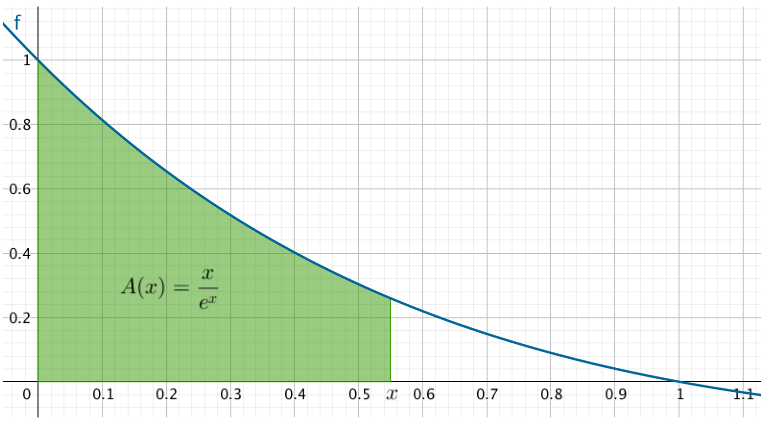
Figur 2: Et areal under grafen til $f(x) = x - 2$

Oppgave 3 *Areal og bestemte integraler*
Bestem arealet (ved et elementært argument) under grafen til $f(x) = 3 - 0{,}2x$ og mellom de vertikale linjene $x = 5$ og $x = x$ (som vi antar ligger mellom 5 og 15), se figur 3. Beregn det bestemte integralet $\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.



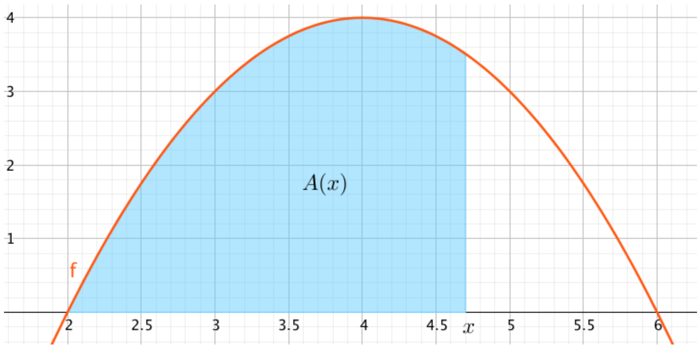
Figur 3: Et areal under grafen til $f(x) = 3 - 0{,}2x$

Oppgave 4 *Arealfunksjonen og dens deriverte*
Arealet under grafen til $f(x)$ fra 0 til $x = x$ er gitt som $A(x) = \frac{x}{e^x}$, se figur 4. Beregn $A(0)$ og $A(1)$. Er svarene rimelige? Bestem $f(x)$.



Figur 4: Et areal under grafen til $f(x)$

Oppgave 5 *Arealfunksjonen*
Bestem arealefunksjonen $A(x)$ for arealet under grafen til $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ fra 2 til $x \leqslant 6$, se figur 5. Beregn $A(6)$.



Figur 5: Et areal under grafen til $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

Oppgave 6 *Bestemte integraler*
Beregn de bestemte integralene.

a) $\int_1^3 2x \, \mathrm{d}x$

b) $\int_1^3 6x \, \mathrm{d}x$

c) $\int_2^7 3 \, \mathrm{d}x$

d) $\int_4^5 3x^2 + 7 \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

g) $\int_0^{\ln 2} 2e^x \, \mathrm{d}x$

h) $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x} \, \mathrm{d}x$

i) $\int_1^2 3e^{-x} \, \mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x} \, \mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1} \, \mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int_1^e \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} \, \mathrm{d}x$

Løsningsforslag til ekstraoppgaver

Oppgave 1 Arealet er gitt som funksjonen $\underline{\underline{A(x) = 3x - 6}}$. Det bestemte integralet er $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3x-6\right]_{x=2}^{x=5} = (3\cdot 5 - 6) - (3\cdot 2 - 6) = 3\cdot 5 - 3\cdot 2 = 15 - 6 = \underline{\underline{9}} = A(5)$.

Oppgave 2 Arealet er gitt som funksjonen $A(x) = \frac{(x-2)(x-2)}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}}}$. Det bestemte integralet er $\int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{x=3}^{x=7} = (\frac{1}{2}\cdot 7^2 - 2\cdot 7) - (\frac{1}{2}\cdot 3^2 - 2\cdot 3) = \underline{\underline{12}} = A(7)$.

Oppgave 3 Arealet er gitt som funksjonen $A(x) = (x-5)\frac{(2+3-0{,}2x)}{2} = \underline{\underline{-0{,}1x^2 + 3x - 12{,}5}}$ (f. eks. ved formelen for et trapes). Det bestemte integralet er $\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3x - 0{,}1x^2\right]_{x=5}^{x=10} = (3\cdot 10 - 0{,}1\cdot 10^2) - (3\cdot 5 - 0{,}1\cdot 5^2) = \underline{\underline{7{,}5}} = A(10)$.

Oppgave 4 $A(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$ og $A(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$. $A(0) = 0$ er rimelig fordi det ikke er noe areal når $x = 0$ og $A(1) \approx 0{,}37$ er rimelig fordi det er noe mindre enn arealet av trekanten med hjørner i $(0{,}0)$, $(1{,}0)$ og $(0{,}1)$ som er $0{,}5$. Vi får $f(x) = A'(x) = \frac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{e^{2x}} = \underline{\underline{\frac{(1-x)}{e^x}}}$.

Oppgave 5

$$A(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 12t\right]_{t=2}^{t=x} = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x - (-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 - 12\cdot 2)$$
$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + \frac{32}{3}}}$$

$A(6) = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$

Oppgave 6

a) 8 b) 24 c) 15 d) 68 e) 7 f) 1

g) 2 h) 8 i) $\frac{3(e-1)}{e^2}$ j) $3\ln(2)$ k) $2\ln(2)$

l) $3 + 2\ln(e+1) - 2\ln(2)$