MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 36

Kap 6.5: Matriseregning. Matrisemultiplikasjon. Transponering

Lærebokoppgaver

[L] 6.5: 1-6

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 8/2 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Vi ser på vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Tegn inn disse vektorene i et to-dimensjonal koordinatsystem. Regn så ut følgende vektorer, og tegn de inn i samme koordinatsystem:

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ b) $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ c) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ d) $2\mathbf{u}$ e) $-\mathbf{v}$ f) $3\mathbf{u}+\mathbf{w}$

Oppgave 2.
Løs vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ for vektorene nedenfor. Er $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3.
Skriv vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ på matriseform, og bruk dette til å løse likningen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4.
Løs matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5.
Vi ser på matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Regn ut følgende uttrykk, dersom det er mulig:

a) $A+B$ b) $2A-3B$ c) $A-C$ d) AB e) BC f) ABC

g) AC h) A^2 i) BA j) CB k) C^2 l) C^TA

Oppgave 6.
Bestem alle (a,b,c,d) slik at vektoren $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ gitt nedenfor. Bruk dette til å avgjøre om $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ når $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Oppgave 7.
Du har 400.000 kr og skal investere i en portefølje av verdipapirer. Du kan velge en kombinasjon av verdipapirene A, B, C med pris $p_A = 60$ kr, $p_B = 75$ kr og $p_C = 320$ kr per aksje på investeringstidspunktet. Vi antar at på et gitt tidspunkt i framtiden, vil ett av tre scenarier slå til. Prisene på verdipapirene i disse scenariene er gitt i tabellen nedenfor. Vi skriver x, y, z for antall

	Pris A	Pris B	Pris C
Kjøpskurs	60	75	320
Scenario 1	80	80	350
Scenario 2	100	25	500
Scenario 3	40	100	55

aksjer du kjøper i hvert av de tre verdipapirene, og går for enkelhets skyld ut i fra x,y,z kan være vilkårlige reelle tall. Vi tillater altså å kjøpe et negativt antall aksjer (short-salg), og antall aksjer trenger ikke være heltall.

a) Vi går ut i fra at betingelsen $60x + 75y + 320z = 400.000$ er oppfyllt. Hva betyr denne betingelsen?

b) Vi skriver R_1, R_2 og R_3 for avkastningen til porteføljen (gevinsten) i de tre scenariene. Er det mulig å velge porteføljen slik at $(R_1, R_2, R_3) = (50.000, 25.000, -100.000)$? Hvilken portefølje må vi da velge?

c) Er det mulig å velge en portefølge av verdipapirer slik at $R_1 > 0$ og $R_2 = R_3 = 0$? Hvilken portefølje må vi da velge? Tolk svaret.

d) Beskriv alle talltripler (R_1, R_2, R_3) av mulige avkastninger i de tre scenariene. Finnes det noen porteføljer slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (garantert gevinst i alle scenarier)?

Oppgave 8.
La A være en 2×3-matrise.

a) Er A symmetrisk?

b) Er $A^T A$ symmetrisk?

c) Regn ut $A^T A$ når $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 9.
Løs matriselikningen for X når $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$:

a) $AX = I$

b) $X^2 = A$

c) $AX = XA$

Fasit

Oppgave 1.

a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$

Oppgave 2.
Generell løsning er $(x_1,x_2,x_3) = (-4t-1,\ t+1,\ t)$ med t en fri parameter. En konkret løsning får vi ved å sette (for eksempel) $t = 0$, som gir $(-1,1,0)$, og det betyr at $\mathbf{b} = -1 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Oppgave 3.
For $a = -8$ er det uendelig mange løsninger $(x_1,x_2,x_3) = (-4t-1,\ t+1,\ t)$ med t en fri parameter (som i forrige oppgave). For $a \neq -8$ er det eksakt én løsning $(x_1,x_2,x_3) = (-1,1,0)$.

Oppgave 4.
Eksakt én løsning $(x,y,z) = (-3/2,4,-1/2)$.

Oppgave 5.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 11 \\ -5 & -4 & -10 \end{bmatrix}$ c) ikke definert d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 10 & 19 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -4 & 3 \\ 33 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 44 & 7 \\ 158 & 19 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 35 & 10 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 13 \end{bmatrix}$ j) ikke definert k) ikke definert l) $\begin{bmatrix} -2 & 11 & 14 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Oppgave 6.
Det er en lineærkombinasjon hvis $-7a+9b-5c+3d=0$, og $(a,b,c,d)=(0,0,1,1)$ svarer ikke til en lineærkombinasjon siden disse verdiene ikke oppfyller likningen.

Oppgave 7.
a) Dette er budsjettbetingelse, altså at total kostnad for aksjen vi kjøper er 400.000 kr.

b) Ja, om vi velger porteføljen $(x,y,z)=(1187\,{}^{1}/_{2}, 2250, 500)$.

c) Ja, om $R_1 = 80.000$. Vi må da velge porteføljen $(x,y,z)\approx(3333\,{}^{1}/_{3}, 2666\,{}^{2}/_{3}, 0)$. Dette betyr i så fall at vi kan investere uten å risikere tap, og med positiv forventet gevinst (en svært gunstig situasjon!).

d) De avkastningstripler (R_1, R_2, R_3) som er mulige å oppnå oppfyller likningen $5R_1 - 2R_2 - 2R_3 = 400.000$. Vi kan velge porteføljen slik at $R_1, R_2, R_3 > 0$ (altså garantert gevinst i alle scenarier, en enda gunstigere situasjon!). For eksempel kan vi realisere avkastningen $R_1 = R_2 = R_3 = 400.000$.

Oppgave 8.

a) Nei

b) Ja

c) $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Oppgave 9.

a) $X = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) ingen løsning

c) $X = s\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$