MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 40

Kap 7.3-4: Partiellderivasjon og stasjonære punkter. Hesse-matrisen og andrederivert-testen.

Lærebokoppgaver

[L] Kap. 7.1: 1-4
[L] Kap. 7.2: 1-2
[L] Kap. 7.3: 1-5
[L] Kap. 7.4: 1-2

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 29/2 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Finn det naturlige definisjonsområdet D_f og verdimengden V_f til f.

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$
c) $f(x,y) = (2x-y)^{-3/2}$
d) $f(x,y) = 17x^{1.2}y^{3.4}$

Oppgave 2.
Løsningene på likningen $f(x,y) = c$ gir nivåkurven til funksjonen $f(x,y)$ med nivå c. Tegn inn nivåkurvene for de oppgitte verdiene av c i samme koordinatsystem. Avgjør hva slags kurve vi får for (alle mulige) ulike verdier av c.

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ og $c = -3, 0, 3$
b) $f(x,y) = xy$ og $c = -1, 0, 1$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ og $c = -9, -5, -1$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ og $c = -2, -1, 0, 1$

Oppgave 3.
Bruk nivåkurvene $f(x,y) = c$ fra oppgave 2 til å avgjøre om funksjonen har maksimums- eller minimumsverdier.

a) $f(x,y) = 12x - 3y$
b) $f(x,y) = xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

Oppgave 4.
Beskriv grafen til $f(x,y) = 3x - 4y + 1$ geometrisk. Med geometrisk beskrivelse mener vi for eksempel: *Grafen til $f(x) = 3 - 2x$ er en rett linje med stigningstall -2 som skjærer y-aksen i $y = 3$*, altså en presis geometrisk beskrivelse uten bruk av likninger eller liknende.

Oppgave 5.
Beregn de partiellderiverte f'_x og f'_y.

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 6.
Beregn Hesse-matrisen $H(f)$ og $H(f)(1,1)$.

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 7.
Finn de stasjonære punktene til f og klassifiser dem.

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 8.
Finn de stasjonære punktene til f og klassifiser dem.

a) $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$
c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Fasit

Oppgave 1.

a) $D_f = \mathbb{R}^2$, $V_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \geq 0\}$, $V_f = [0,\infty)$

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y > 0\}$, $V_f = (0,\infty)$

d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$, $V_f = [0,\infty)$

Oppgave 2.

a) Rett linje med stigningstall 4 som skjærer y-aksen i $y = c/3$.

b) Hyperbel $y = c/x$ hvis $c \neq 0$, og de to aksene hvis $c = 0$.

c) Sirkel med radius $\sqrt{c+5}$ og sentrum $(-1,2)$ hvis $c > -5$, ett punkt $(-1,2)$ hvis $c = -5$, ingen punkter ellers.

d) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \frac{1}{2}\sqrt{c+1}$ når $c > -1$, ett punkt $(1,0)$ hvis $c = -1$, og ingen punkter ellers.

Oppgave 3.

a) Hverken maksimum eller minimum.

b) Hverken maksimum eller minimum.

c) Ikke maksimum, men minimumsverdien er $f_{min} = -5$.

d) Ikke maksimum, men minimumsverdien er $f_{min} = -1$.

Oppgave 4.

Grafen er planet som skjærer z-aksen i $z = 1$ og har normalvektor $(3,-4,-1)$.

Oppgave 5.

a) $f'_x = 2$, $f'_y = 3$

b) $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$

c) $f'_x = 8x - 6y$, $f'_y = -6x + 18y$

d) $f'_x = 2x - 2$, $f'_y = 8y$

e) $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = -3x + 3y^2$

f) $f'_x = -3x^2 + 3$, $f'_y = 2y$

g) $f'_x = 2x(y^2 - 1)$, $f'_y = 2y(x^2 - 1)$

h) $f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Oppgave 6.

a) $H(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $H(f) = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}$

d) $H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

e) $H(f) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

f) $H(f) = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

g) $H(f) = \begin{bmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

h) $H(f) = (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot \begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$, $H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{bmatrix}$

Oppgave 7.

a) Ingen.

b) (0,0) er lokalt min.

c) (0,0) er lokalt min.

d) (1,0) er lokalt min.

e) (0,0) er sadelpunkt og (1,1) er lokalt min.

f) (1,0) er sadelpunkt og (−1,0) er lokalt min.

g) (0,0) er lokalt maks. og $(\pm 1, \pm 1)$ er sadelpunkt.

h) Ingen; (0,0) er kritisk punkt.

Oppgave 8.

a) (0,0) er sadelpunkt.

b) (0,0), $(0,-1)$ er sadelpunkt, $(3/25, -3/5)$ er lokalt maks.

c) (0,0) er lokalt (og globalt) maks.