MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 41
Kap. 7.5: Oppgaveregning. Tangenten til en nivåkurve.

Lærebokoppgaver

[L] Kap. 7.5: 1-5

Ekstraoppgaver

Oppgave 1 Beregn de første ordens partiellderiverte f'_x and f'_y.

a) $f(x,y) = 4x - 3y + e$
b) $f(x,y) = e^{xy}$
c) $f(x,y) = -0{,}1x^2 - 500xy - 0{,}3y^2 + 1000x + 2000y + 5000$
d) $f(x,y) = xe^y + 3ye^x$
e) $f(x,y) = \frac{x+2}{y+3}$
f) $f(x,y) = x^2e^{-2y}$
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
h) $f(x,y) = \ln(x+y)$
i) $f(x,y) = -3x^2 - 50xy - 0{,}5y^2$

Oppgave 2 Beregn de andre ordens partiellderiverte f''_{xx}, f''_{xy} and f''_{yy}.

a) $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + 7y^2$
b) $f(x,y) = e^{xy}$
c) $f(x,y) = -0{,}1x^2 - 500xy - 0{,}3y^2 + 1000x + 2000y + 5000$
d) $f(x,y) = x^2e^{-2y}$
e) $f(x,y) = 10x^{2{,}9}y^{3{,}1}$
f) $f(x,y) = \ln(x+y)$
g) $f(x,y) = -3x^2 - 50xy - 0{,}5y^2$

Oppgave 3 (Øk. adm. eksamen høsten 2015, oppgave 5)
Vi har funksjonen $f(x,y) = 6x^2 + 3xy + y^2 - 30x - 10y$.

a) Beregn de første ordens partiellderiverte til $f(x,y)$.
b) Bestem de stasjonære punktene til $f(x,y)$.
c) Avgjør om punktet du har funnet er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et salpunkt for $f(x,y)$.

Oppgave 4 En produsenten av sportsklær produserer og selger x enheter av modell A og y enheter av modell B. Profittfunksjonen viser seg å være

$$P(x, y) = -3x^2 - 5y^2 - 3xy + 1191x + 1488y - 50\,000\,.$$

a) Beregn de første ordens partiellderiverte til $P(x, y)$.
b) Bestem de stasjonære punktene til $P(x, y)$.
c) Forklar hvorfor punktet du fant i (b) er et lokalt maksimumspunkt for $P(x, y)$.
d) Det stasjonære punktet er et globalt maksimumspunkt. Beregn maksimumsverdien til $P(x, y)$.

Oppgave 5 (Øk. adm. eksamen vår 2015, oppgave 4)
Vi har en funksjon $f(x, y) = -5x^2 + 3xy - 6y^2 + 76x + 66y - 250$.

a) Beregn de første ordens partiellderiverte til $f(x, y)$.
b) Bestem de stasjonære punktene til $f(x, y)$.
c) Klassifisér punktet du fant i b (maks-, min- eller salpunkt).

Oppgave 6 Vi har en funksjon $f(x, y) = -0{,}4x^2 - xy - 0{,}5y^2 + 22x + 20y + 2500$.

a) Beregn de første ordens partiellderiverte til $f(x, y)$.
b) Bestem de stasjonære punktene til $f(x, y)$.
c) Klassifisér punktet du fant i b (maks-, min- eller salpunkt).

Fasit

Oppgave 1

a) $f'_x(x,y) = 4$ og $f'_y(x,y) = -3$
b) $f'_x(x,y) = ye^{xy}$ og $f'_y(x,y) = xe^{xy}$ (hint: Her må du bruke kjerneregelen!)
c) $f'_x(x,y) = -0{,}2x - 500y + 1000$ og $f'_y(x,y) = -500x - 0{,}6y + 2000$
d) $f'_x(x,y) = e^y + 3ye^x$ og $f'_y(x,y) = xe^y + 3e^x$
e) $f'_x(x,y) = \frac{1}{y+3}$ og $f'_y(x,y) = -\frac{x+2}{(y+3)^2}$
f) $f'_x(x,y) = 2xe^{-2y}$ og $f'_y(x,y) = -2x^2e^{-2y}$
g) $f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ og $f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$
h) $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y}$ og $f'_y(x,y) = \frac{1}{x+y}$
i) $f'_x(x,y) = -6x - 50y$ og $f'_y(x,y) = -50x - y$

Oppgave 2

a) $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 5$ og $f''_{yy} = 14$
b) $f''_{xx} = y^2e^{xy}$, $f''_{xy} = (1+xy)e^{xy}$ og $f''_{yy} = x^2e^{xy}$
c) $f''_{xx} = -0{,}2$, $f''_{xy} = -500$ og $f''_{yy} = -0{,}6$
d) $f''_{xx} = 2e^{-2y}$, $f''_{xy} = -4xe^{-2y}$ og $f''_{yy} = 4x^2e^{-2y}$
e) $f''_{xx} = 55{,}1x^{0{,}9}y^{3{,}1}$, $f''_{xy} = 89{,}9x^{1{,}9}y^{2{,}1}$ og $f''_{yy} = 65{,}1x^{2{,}9}y^{1{,}1}$
f) $f''_{xx} = \frac{-1}{(x+y)^2}$, $f''_{xy} = \frac{-1}{(x+y)^2}$ og $f''_{yy} = \frac{-1}{(x+y)^2}$
g) $f''_{xx} = -6$, $f''_{xy} = -50$ og $f''_{yy} = -1$

Oppgave 3

a) $f'_x(x,y) = 12x + 3y - 30$ og $f'_y(x,y) = 3x + 2y - 10$
b) $(x,y) = (2,2)$
c) $A = f''_{xx}(2,2) = 12$, $B = f''_{xy}(2,2) = 3$, $C = f''_{yy}(2,2) = 2$ så $AC - B^2 = 15 > 0$ og $A = 12 > 0$ og ved andrederiverttesten er $(2,2)$ et lokalt minimumspunkt.

Oppgave 4

a) $P'_x(x,y) = -6x - 3y + 1191$ og $P'_y(x,y) = -3x - 10y + 1488$.
b) $(x,y) = (146,105)$
c) $A = P''_{xx}(146,105) = -6$, $B = P''_{xy}(146,105) = -3$, $C = P''_{yy}(146,105) = -10$ så $AC - B^2 = 51 > 0$ og $A = -6 < 0$ og ved andrederiverttesten er $(146,105)$ et lokalt maksimumspunkt.
d) $f(146,105) = 115\,063$.

Oppgave 5

a) $f'_x(x,y) = -10x + 3y + 76$ og $f'_y(x,y) = 3x - 12y + 66$
b) $(x,y) = (10,8)$
c) $A = f''_{xx}(10,8) = -10$, $B = f''_{xy}(10,8) = 3$, $C = f''_{yy}(10,8) = -12$ så $AC - B^2 = 111 > 0$ og $A = -10 < 0$ og ved andrederiverttesten er $(2,2)$ et lokalt maksimumspunkt.

Oppgave 6

a) $f'_x(x,y) = -0{,}8x - y + 22$ og $f'_y(x,y) = -x - y + 20$
b) $(x,y) = (-10,30)$
c) $A = f''_{xx}(-10,30) = -0{,}8$, $B = f''_{xy}(10,10) = -1$, $C = f''_{yy}(10,10) = -1$ så $AC - B^2 = -0{,}2 < 0$ og ved andrederiverttesten er $(2,2)$ et sadelpunkt.