MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 44
Kap 7.4: Gradienten. Optimering uten bibetingelser.

Lærebokoppgaver

[L] Kap. 7.6: 1-2

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 14/3 fra 12 i D1-065/70

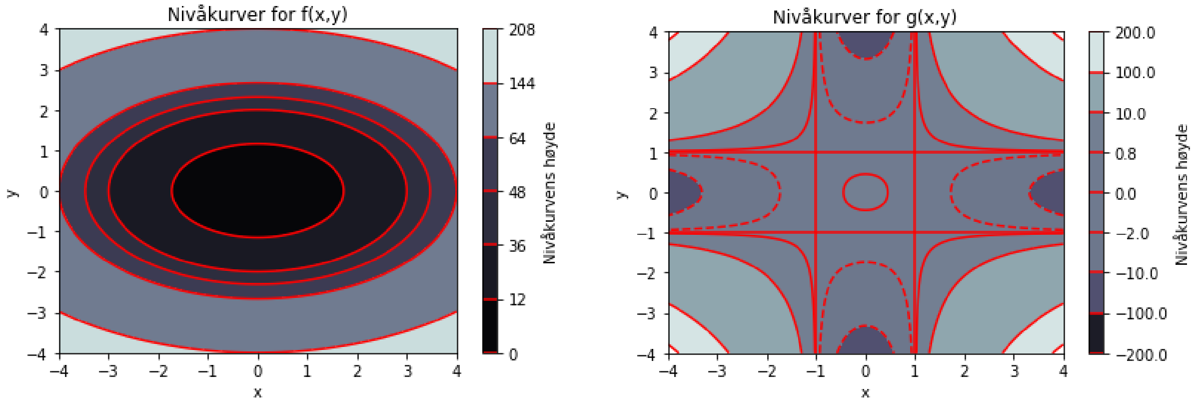
Oppgave 1.
Vi ser på delmengden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gitt ved ulikheten $y(x-2) \leq 3$. Lag en skisse av $D = \{(x, y) \mid y(x-2) \leq 3\}$, og marker indre punkter og randpunkter for D. Er D kompakt?

Oppgave 2.
Vi ser på en delmengde av planet $\mathbb{R}^2$ gitt ved følgende betingelser. Avgjør om delmengden er kompakt. Det er nyttig å lage en skisse av området.

a) $2x+3y=6$
b) $2x+3y<6$
c) $2x+3y \leq 6$
d) $x^2+y^2=4$
e) $x^2+y^2 \geq 4$
f) $x^2+y^2 \leq 4$
g) $x^2-2x+4y^2=4$
h) $x^2-2x+4y^2 \leq 4$
i) $x^2-2x+4y^2 \geq 4$
j) $xy=1$
k) $xy \leq 1$
l) $xy \geq 1$
m) $\sqrt{x^2+y^2}=3$
n) $\sqrt{x^2+y^2} \leq 3$
o) $x^2y^2-x^2-y^2+1=0$
p) $x^2y^2-x^2-y^2+1=1$

Oppgave 3.
a) Hva sier ekstremverdisetningen?
b) Gi eksempler på en mengde D i planet som er lukket, men ikke begrenset, og en mengde E i planet som er begrenset, men ikke lukket.
c) Kan du finne en funksjon $f(x, y)$ som ikke har maksimum og minimum på D, og en funksjon $g(x, y)$ som ikke har maksimum og minimum på E?

Oppgave 4.
Nivåkurver for funksjonene $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ og $g(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ i området $-4 \leq x, y \leq 4$ er vist i figurene nedenfor.



a) Finn max / min $f(x,y)$ når $-4 \leq x, y \leq 4$ ved hjelp av figuren.

b) Finn max / min $g(x,y)$ når $-4 \leq x, y \leq 4$ ved hjelp av figuren.

c) Finn max / min $f(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 16$ ved hjelp av figuren.

d) Finn max / min $g(x,y)$ når $x = y$ ved hjelp av figuren.

Oppgave 5.
Løs optimeringsproblemene.

a) max / min $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \leq x, y \leq 1$

b) max / min $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ når $0 \leq x, y \leq 2$

c) max / min $f(x,y) = e^{xy-x-y}$ når $0 \leq x, y \leq 2$

d) max / min $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$ når $-1 \leq x, y \leq 1$

e) max / min $f(x,y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ når $-1 \leq x, y \leq 1$

Oppgave 6.
Finn maksimums- og minimumsverdien i optimeringsproblemet

$$\max / \min f(x,y) = \sqrt{xy} - x \text{ når } 0 \leq x, y \leq 1\,.$$

Fasit

Oppgave 1.
Randpunkter er gitt ved likningen $y(x-2)=3$, det vil punkter på grafen til $y=3/(x-2)$ (en hyperbel). Indre punkt er gitt ved $y(x-2)<3$, det vil si punkter under hyperbelen når $x>2$, og punkter over hyperbelen når $x<2$, samt alle punkter med $x=2$. Mengden D er ikke kompakt (lukket, men ikke begrenset).

Oppgave 2.

a) Nei	b) Nei	c) Nei	d) Ja	e) Nei	f) Ja	g) Ja	h) Ja
i) Nei	j) Nei	k) Nei	l) Nei	m) Ja	n) Ja	o) Nei	p) Nei

Oppgave 4.

a) $f_{\text{min}}=0$ i $(0,0)$, og $f_{\text{max}}=208$ i $(\pm 4,\pm 4)$

b) $f_{\text{min}}=-15$ i $(0,\pm 4)$ og $(\pm 4,0)$, og $f_{\text{max}}=225$ i $(\pm 4,\pm 4)$

c) $f_{\text{min}}=64$ i $(\pm 4,0)$, og $f_{\text{max}}=144$ i $(0,\pm 4)$

d) $f_{\text{min}}=0$ i $(1,1)$ og $(-1,-1)$, og $f_{\text{max}}=225$ i $(4,4)$ og $(-4,-4)$

Oppgave 5.

a) $f_{\text{max}}=1$, $f_{\text{min}}=-1$

b) $f_{\text{max}}=8$, $f_{\text{min}}=-1$

c) $f_{\text{max}}=1$, $f_{\text{min}}=1/e^2$

d) $f_{\text{max}}=2\sqrt{3}/9$,
$f_{\text{min}}=-2\sqrt{3}/9$

e) $f_{\text{max}}=1$, $f_{\text{min}}=0$

Oppgave 6.
Se avsluttende eksamen MET11807 06/2021 Oppgave 5: $f_{\text{max}}=1/4$, $f_{\text{min}}=-1$