# MET1180 Matematikk for siviløkonomer
# Vår 2024
## Oppgaver

*... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*

R. Lucas

# Forelesning 47
## Oppgaveregning
### Kap. 7.6: Forklaring av Lagranges multiplikatormetode.

### Øvingsoppgaver fra *Eriksen: Matematikk – oppgaver og løsningsforslag*

Kap. 9.5: 9.32-34

### Ekstraoppgaver *Lagranges multiplikatormetode*

**Oppgave 1** Bruke Lagranges metode til å bestemme maksimum til $f(x,y)$ med den oppgitte bibetingelsen.

a) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ og $x + y = 1$
b) $f(x,y) = 5x^2 + xy - 3y^2$ og $2x - y = 20$

**Oppgave 2** Vi har funksjonen $f(x,y) = -3x^2 + 3xy - y^2 + 6x + y$.

a) Beregn de først og andre ordens partiellderiverte til $f(x,y)$.
b) Bestem de stasjonære punktene til $f(x,y)$.
c) Vis at det stasjonære punktet er et (lokalt) maksimumspunkt. Beregn den tilhørende maksimumsverdien.
d) Bruk Lagranges metode til å bestemme maksimumspunktet til $f(x,y)$ gitt begrensningen $x + y = 11$. Beregn den tilhørende maksimumsverdien.

**Oppgave 3** En produsent av sportsklær produserer og selger $x$ enheter av modell A og $y$ enheter av modell B. Profittfunksjonen[1] er $P(x,y) = -3x^2 - 5y^2 - 3xy + 1191x + 1488y - 50\,000$. Det en en begrensning på det totale produksjonsvolumet slik at $x + y = 201$.

a) Bruk Lagranges metode til å bestemme maksimumspunktet til $f(x,y)$ gitt bibetingelsen $x + y = 201$.
b) Beregn den nye maksimumsverdien til profitten.

**Oppgave 4** (*Øk.adm.eksamen 2016v, oppgave 4*)
Et selskap produserer og selger $x$ enheter av produkt A og $y$ enheter av produkt B. Prisen per enhet av produkt A er $p = 125 - x$ og prisen per enhet av produkt B er $q = 85$. Kostnaden ved å produsere $x$ enheter av produkt A og $y$ enheter av produkt B er $C(x,y) = (x+y)^2 + 15(x+y) + 1400$.

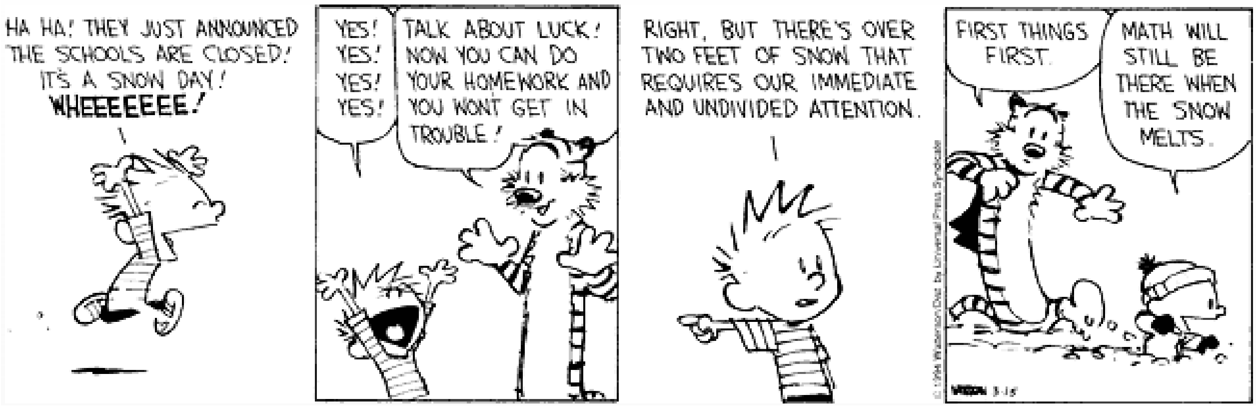
a) Vis at profittfunksjonen er $P(x,y) = -2x^2 - 2xy - y^2 + 110x + 70y - 1400$.
b) Bestem det stasjonære punktet til $P(x,y)$.
c) Vis at du har funnet er (lokalt) maksimum for profittfunksjonen

[1] Kalles også *overskuddsfunksjonen* på norsk.

d) Beregn maksimumsverdien til profitten.

Anta selskapet bare kan produsere til sammen 30 enheter av de to produktene.

e) Hvor mange enheter bør selskapet produsere av hvert av produktene for å maksimere profitten?
f) Beregn den nye maksimumsverdien til profitten.



# Fasit

## Ekstraoppgaver

### Oppgave 1

a) Lagrangefunksjonen er $F(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - \lambda(x+y-1)$. Da er $F'_x(x,y) = 2x - 4y - \lambda$ og $F'_y(x,y) = -4x + 8y - \lambda$. Likningene $F'_x(x,y) = 0$, $F'_y(x,y) = 0$ og $x + y = 1$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{3})}}$.

b) Lagrangefunksjonen er $F(x,y) = 5x^2 + xy - 3y^2 - \lambda(2x - y - 20)$. Da er $F'_x(x,y) = 10x + y - 2\lambda$ og $F'_y(x,y) = x - 6y + \lambda$. Likningene $F'_x(x,y) = 0$, $F'_y(x,y) = 0$ og $2x - y = 20$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(22\,,\,24)}}$.

### Oppgave 2

a) $f'_x(x,y) = -6x + 3y + 3$, $f'_y(x,y) = 3x - 2y + 1$
$f''_{xx}(x,y) = -6$, $f''_{xy}(x,y) = 3$, $f''_{yy}(x,y) = -2$

b) Stasjonært punkt: $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(5\,,\,8)}}$.

c) $A = f''_{xx}(5,8) = -6$, $B = f''_{xy}(5,8) = 3$, $C = f''_{yy}(5,8) = -2$. Ved andrederiverttesten er $(5\,,\,8)$ et (lokalt) maksimumspunkt fordi $AC - B^2 = 3 > 0$ og $A = -6 < 0$. Maksimumsverdi: $f(5,8) = \underline{\underline{19}}$.

d) Lagrangefunksjonen er $F(x,y) = -3x^2 + 3xy - y^2 + 6x + y - \lambda(x+y-11)$. Da er $F'_x(x,y) = -6x + 6y + 3 - \lambda$ og $F'_y(x,y) = 3x - 2y + 1 - \lambda$. Likningene $F'_x(x,y) = 0$, $F'_y(x,y) = 0$ og $x + y = 11$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(\frac{30}{7}\,,\,\frac{47}{7})}}$. Maksimumsverdi: $f(\frac{30}{7}, \frac{47}{7}) = \underline{\underline{18{,}57}}$.

### Oppgave 3

a) Lagrangefunksjonen er $F(x,y) = -3x^2 - 5y^2 - 3xy + 1191x + 1488y - 50\,000 - \lambda(x+y-201)$ med $F'_x(x,y) = -6x - 3y + 1191 - \lambda$ og $F'_y(x,y) = -3x - 10y + 1488 - \lambda$. Likningene $F'_x(x,y) = 0$, $F'_y(x,y) = 0$ og $x + y = 201$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(111\,,\,90)}}$

b) $P(111,90) = \underline{\underline{108\,688}}$

### Oppgave 4

a) Profitten er inntekt minus kostnad:

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= x \cdot p + y \cdot q - C(x,y) = x(125 - x) + y \cdot 85 - [(x+y)^2 + 15(x+y) + 1400] \\
&= 125x - x^2 + 85y - x^2 - 2xy - y^2 - 15x - 15y - 1400 \\
&= -2x^2 - 2xy - y^2 + 110x + 70y - 1400
\end{aligned}
$$

b) $P'_x(x,y) = -4x - 2y + 110$ og $P'_y(x,y) = -2x - 2y + 70$. Likningene $P_x(x,y) = 0$ og $P_y(x,y) = 0$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(20\,,\,15)}}$

c) $P''_{xx}(x,y) = -4$, $P''_{xy}(x,y) = -2$ og $P''_{yy}(x,y) = -2$. Så $A = P''_{xx}(20,15) = -4$, $B = P''_{xy}(20,15) = -2$, $C = P''_{yy}(20,15) = -2$. Ved andrederiverttesten er $(20\,,\,15)$ et (lokalt) maksimumspunkt fordi $AC - B^2 = 4 > 0$ og $A = -4 < 0$.

d) $P(20,15) = -2 \cdot 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 - 15^2 + 110 \cdot 20 + 70 \cdot 15 - 1400 = \underline{\underline{225}}$

e) Lagrangefunksjonen er $F(x,y) = -2x^2 - 2xy - y^2 + 110x + 70y - 1400 - \lambda(x+y-30)$ med $F'_x(x,y) = -4x - 2y + 110 - \lambda$ og $F'_y(x,y) = -2x - 2y + 70 - \lambda$. Likningene $F'_x(x,y) = 0$, $F'_y(x,y) = 0$ og $x + y = 30$ har løsningen $(x\,,\,y) = \underline{\underline{(20\,,\,10)}}$

f) $P(20,10) = -2 \cdot 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 - 10^2 + 110 \cdot 20 + 70 \cdot 10 - 1400 = \underline{\underline{200}}$