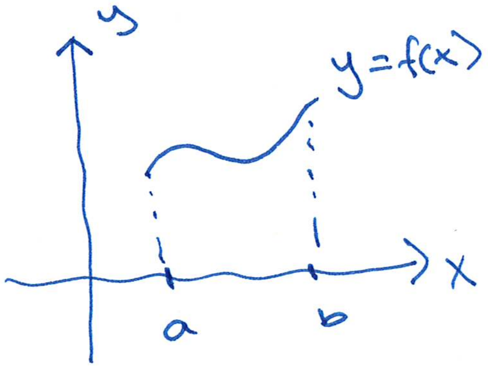
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Antiderivasjon og ubestemte integraler	[E] 5.1	5.1.1 - 5.1.5
2	Grunnleggende integrasjonsregler	[E] 5.2	5.2.1 - 5.2.5

MET1180 i vår senestert

Innhold: A Integrasjon
B Lineær algebra
C Funksjoner i to variabler

1 Antiderivasjon og ubestemte integral

La $f(x)$ være en funksjon definert på et intervall $[a,b]$.



Den generelle antideriverte til $4x$: $2x^2 + C$

den generelle antideriverte til $f(x)$

Defn:
En antiderivert til f er en funksjon F slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 4x$ har antiderivert $F(x) = 2x^2$

Resultat:
Hvis f er kontinuerlig, så har den en antiderivert. Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så er alle antideriverte til $f(x)$ gitt ved

$$F(x) + C$$

Ubestemt integral:

$\int \underbrace{\ }_{\text{integrasjons-symbolet}} \underbrace{f(x)}_{\text{funksjonen som skal integreres}} \underbrace{dx}_{\text{betyr at } x \text{ er integrasjonsvar.}}$ ← det ubestemte integralet av $f(x)$

ubestemt integral = generelle anti-deriverte til $f(x)$ m.h.t. x

Eks:

$$\int 4x\,dx = 2x^2 + \underbrace{C}_{\text{integrasjons-konstanten}}$$

$$\int \underbrace{3+2x}_{f(x)}\,dx = 3x + x^2 + C$$

② Integrasjonsregler

(a) Potensregler: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(c) $\int u+v\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
$\int u-v\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx$ } u, v uttrykk i x

(d) $\int c\cdot u\,dx = c\cdot\int u\,dx$ } c konstant, u uttrykk i x

Eks: $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{x^4}{4} + C$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{x} + C}}$$

$n = 1/2$
$n+1 = 3/2$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}\cdot x^{-1} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + C}}$$

$n = -2$
$n+1 = -1$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \;?$ ikke mulig med potens regelen

Eks: $\int x^3 - 5x^7\,dx = \int x^3\,dx - \int 5x^7\,dx$

$$= \int x^3\,dx - 5\int x^7\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + C_1 - 5\left(\frac{1}{8}x^8 + C_2\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{8}x^8 + C_1 - 5C_2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{8}x^8 + C}}$$

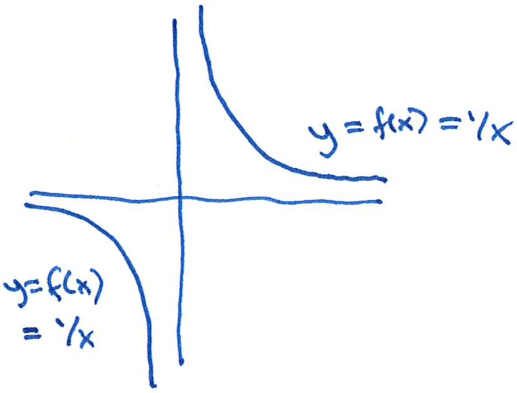
Eks: $\int 1 - 4x + x^2\,dx = x - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

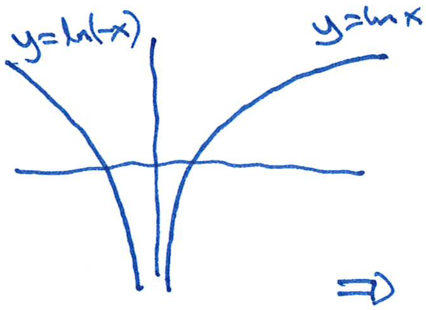
$$= \underline{\underline{x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C}}$$

Eks: $\int \frac{x^2 - x^3}{x}\,dx = \int x - x^2\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C}}$

Forklaring: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$f(x) = 1/x\,,\ x \neq 0$





Husk:

$(\ln x)' = 1/x$

$\Downarrow$

$F(x) = \ln(x)\,,\ x>0$ er en antiderivert til $f(x) = 1/x$

Merk:

$x<0 \Rightarrow -x>0$

$\Downarrow$

$\ln(-x)$ er definert for $x<0$

og

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\quad F(x) = \begin{cases} \ln(x) & ,\ x>0 \\ \ln(-x) & ,\ x<0 \end{cases} \qquad F'(x) = \begin{cases} 1/x\,, & x>0 \\ 1/x\,, & x<0 \end{cases} = f(x)$$

Altså:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = F(x) + C = \underline{\underline{\ln|x| + C}}$$

$|x| = x$ når $x>0$
$|x| = -x$ " $x<0$

Integrasjonsregler (fortsatt):

e) $\int e^x \, dx = e^x + C$

$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a > 0)$

Eks: $\int 2^x \, dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$ $\quad (2^x)' = 2^x \cdot \ln(2)$

Hva mangler fra integrasjonsreglene:

* produkt: $\int u \cdot v \, dx$ Eks: $\int x \cdot e^x \, dx$
* kjerneregel: Eks: $\int \sqrt{2x-1} \, dx$
* brøkregel: $\int \frac{u}{v} \, dx$ Eks: $\int \frac{x^2}{x-1} \, dx$

$\Downarrow$

Kommer i de to neste forelesningene

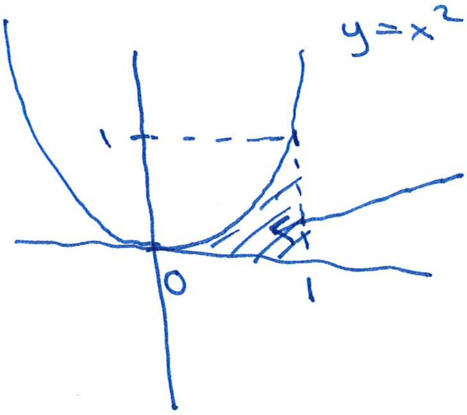
<u>Bestemte integral:</u> $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

det bestemte integralet av $f(x)$ på intervallet $[a,b]$

<u>Eks:</u>

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + C\right]_0^1 = \left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + C\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 0^3 + C\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} + \cancel{C} - 0 - \cancel{C} = \underline{\underline{1/3}}$$



Arealet under grafen til $f(x) = x^2$ i intervallet $[0,1]$ er $\int_0^1 x^2\,dx = \underline{\underline{1/3}}$

Hva med $\int \ln x \, dx$?

Prøver oss frem: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

$(x \cdot \ln x - x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Konklusjon: $\int \ln x \, dx = \underline{\underline{x \cdot \ln x - x + C}}$