	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgavegjennomgang		
2	Lineære systemer og Kramers regel	[E] 6.4	[E] 6.4.5 - 6.4.7

① Repetisjon

– utregning av determinant:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Kofaktorutvikling

$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \ldots$ første rad

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$

determinanten vi får etter å ha strøket rad i, kol j

ulike Gauss-eliminasjon

forenkle, $\rfloor \cdot s$ bevarer determinanten

② Determinant, lineære systemer og Kramers regel

Lineære systemer på matriseform

Eks:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 7 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned} \qquad (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \text{Gauss-elimin.}$$

utvidet matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Matriseform: } \boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

koeff. matrisen

Et lineært system er kvadratisk hvis ant. likninger = antall ukjente (dvs $n \times n$ lineært system):

$$
\underbrace{n \text{ likn.}}\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right.
$$

n ukjente

Matriseform: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$n \times n$-matrise, kan regne ut $|A|$!

Resultat:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{For kvadratiske } (n\times n) \text{ lin. systemer har vi:} \\ |A| \neq 0 \iff \text{én entydig løsning} \\ |A| = 0 \iff \text{ingen løsning eller uendelig mange løsn.} \end{array}}$$

Eks:
$$
\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{array}\right\}
\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = +1(-6) - 1(3) + 1(3) = -6 \neq 0
$$

én entydig løsn.

Lineære system med parametre:

Eks:
$$\begin{aligned} x + 2y - az &= a-1 \\ ax + 2y - z &= 3 \\ x + (a+1)y - z &= 3 \end{aligned}$$

3×3 lineært system med ukjente x, y, z og parameter a

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ a & 2 & -1 & 3 \\ 1 & a+1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -a \\ -1 \end{array}$$

Gauss m/parametre kan bli kronglete

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3-a(a-1) \\ 0 & a-1 & a-1 & 3-(a-1) \end{array}\right) :2$$

$a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ingen løsn.

$a \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 1-a & \frac{(a^2-1)}{2} & \frac{(3+a-a^2)}{2} \\ 0 & a-1 & a-1 & 4-a \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}(a^2-1) & \frac{1}{2}(3+a-a^2) \\ 0 & 0 & a-1+\frac{1}{2}(a^2-1) & 4-a+\frac{1}{2}(3+a-a^2) \end{array}\right)$$

Bruker heller determinanter når vi har parametre i det lineære systemet!

$$x + 2y - az = a - 1$$
$$ax + 2y - z = 3$$
$$x + (a+1)y - z = 3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = +1\cdot(-2+a+1) - 2(-a+1)$$
$$+(-a)\cdot(a(a+1)-2)$$

$$= a - 1 + 2a - 2 - a(a^2 + a - 2)$$
$$= 3a - 3 - a^3 - a^2 + 2a = \underline{-a^3 - a^2 + 5a - 3}$$

$\underline{|A| = 0}$: $-a^3 - a^2 + 5a - 3 = 0$

$a = 1$ gir $-1 - 1 + 5 - 3 = 0$
$\Rightarrow \underline{a = 1}$ $\underline{\text{løsn.}}$

$$-a^3 - a^2 + 5a - 3 : a - 1 = -a^2 - 2a + 3$$
$$\frac{-a^3 + a^2}{\quad}$$
$$-2a^2 + 5a - 3$$
$$\frac{-2a^2 + 2a}{\quad}$$
$$3a - 3$$
$$\frac{3a - 3}{0}$$

$$(a-1)\cdot(-a^2 - 2a + 3) = 0$$

$\underline{a = 1}$ eller $-a^2 - 2a + 3 = 0$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}$$

$$-1\cdot(a-1)^2(a+3) = 0$$

$$= \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$$\underline{a = -3}, \quad \underline{a = 1}$$

Konklusjon:

$|A| = 0$: $a = 1, -3$ — ingen eller uend. mange løsn.

$|A| \neq 0$: $a \neq 1, -3$ — én entydig løsn.

Unntak:

$a=1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ingen løsn.

$a=-3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 8 & -9 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

ingen løsn.

Alle andre tilfeller:

$a \neq 1, -3$: én entydig løsn. (x, y, z) hver hver koordinat avhenger av a.

Kramers regel:

A $n \times n$-matrise og $|A| \neq 0$

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \qquad y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får ved å bytte ut i'te kolonne i A med $\underline{b}$-kolonnen.

Eks:
$$\begin{aligned} x + 2y - az &= a-1 \\ ax + 2y - z &= 3 \\ x + (a+1)y - z &= 3 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} a-1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a^3 - a^2 + 5a - 3$$

$$|A_1(\underline{b})| = \begin{vmatrix} a-1 & 2 & -a \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = +(a-1)(-2-(a+1)) - 2(0) - a(3(a+1)-6)$$

$$= (a-1)(-a-3) - a(3a-3) = -\underline{a^2} - 2a + 3 - \underline{3a^2} + 3a$$

$$= \underline{-4a^2 + a + 3}$$

Husk: $a \neq 1, -3$: én entydig løsning (x, y, z)

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \cancel{-a^3 - a^2 + 5a - 3}$$

$$= \frac{-4a^2 + a + 3}{-a^3 - a^2 + 5a - 3} = \frac{\cancel{(a-1)} \cdot (-4a-3)}{-(a-1)^{\cancel{2}}(a+3)} = \frac{-4a-3}{-(a-1)(a+3)} = \underline{\underline{\frac{4a+3}{(a-1)(a+3)}}}$$

$$y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \ldots$$

$$z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \ldots$$

Se neste side

Skrevet ut etter forelesningen:

$$|A_2(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & -a \\ a & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(0) - (a-1)(-a+1) - a(3a-3)$$

$$= (a-1)\cdot(a-1) - 3a(a-1) = (a-1)(a-1-3a) = (a-1)(-2a-1)$$

$$= \underline{-(a-1)(2a+1)}$$

$$|A_3(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = 1\left(6-3(a+1)\right) - 2(3a-3) + (a-1)(a^2+a-2)$$

$$= -3a+3 - 6(a-1) + (a-1)(a^2+a-2)$$

$$= (a-1)(-3-6+a^2+a-2)$$

$$= \underline{(a-1)(a^2+a-11)}$$

Konkl: For $a \neq 1, -3$ har vi:

$$x = \underline{\underline{\frac{4a+3}{(a-1)(a+3)}}} \qquad y = \frac{\cancel{-}\cancel{(a-1)}(2a+1)}{\cancel{-}(a-1)^{\cancel{2}}(a+3)} = \underline{\underline{\frac{2a+1}{(a-1)(a+3)}}} \qquad z = \frac{\cancel{(a-1)}(a^2+a-11)}{-\cancel{(a-1)}^2(a+3)}$$

(fra forrige side)

$$= \underline{\underline{-\frac{a^2+a-11}{(a-1)(a+3)}}}$$