	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning		
2	Klassifikasjon av stasjonære punkter	[E] 7.4	[E] 7.4.1 - 7.4.4

1 Repetisjon:

$f(x,y)$ fn. i to variabler

D_f: alle (x,y) slik at vi kan beregne $f(x,y)$

$z = f(x,y)$: grafen til f

Nivåkurver: $z = \text{konst.} \Leftrightarrow f(x,y) = \text{konst.}$

Partiell-deriverte: $f'_x = f'_x(x,y)$

$f'_y = f'_y(x,y)$

første ordens partiell-deriverte

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Hesse-matrisen av andre ordens part.-deriverte

Stasjonært pkt: $\boxed{f'_x = 0,\ f'_y = 0}$

$\boxed{f''_{xy} = f''_{yx} \Leftrightarrow H(f) \text{ symm.}}$

Oppgaveark 40-41:

1d) $f(x,y) = 17x^{1.2}y^{3.4}$ C.D. fn.

$= 17x \cdot x^{1/5} y^3 y^{2/5}$

$= 17x \sqrt[5]{x}\, y^3 \sqrt[5]{y^2}$

Alt 1:

D_f: $\mathbb{R}^2$ dvs alle (x,y)

V_f: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Alt 2: $x,y > 0 \leftarrow D_f$

$V_f = (0, \rightarrow)$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

6h, 5h

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{u} = u^{1/2} \quad , u = \underline{x^2+y^2}$$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x = \tfrac{1}{2} u^{-1/2} \cdot 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y = \tfrac{1}{2} u^{-1/2} \cdot 2y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \left(x \cdot u^{-1/2}\right)'_x = 1 \cdot u^{-1/2} +$$

$$x \cdot \underbrace{\left(-\tfrac{1}{\cancel{2}} u^{-3/2}\right) \cdot \cancel{2}x}_{(u^{-1/2})'_x} = \frac{1 \cdot u}{\sqrt{u} \cdot u} - \frac{x^2}{u\sqrt{u}}$$

$$= \frac{u - x^2}{u \cdot \sqrt{u}} = \frac{\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2}}{u \cdot \sqrt{u}} = \frac{y^2}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right)'_y = \left(x/\sqrt{u}\right)'_y = x \cdot \left(u^{-1/2}\right)'_y$$

$$\frac{-xy}{u \cdot \sqrt{u}} \qquad = x \cdot \left(-\tfrac{1}{\cancel{2}}\right) u^{-3/2} \cdot \cancel{2}y = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = \frac{x^2}{u\sqrt{u}}$$ ved symmetri

$f''_{yy}(x,y) = f''_{xx}(y,x)$ siden $f(x,y) = f(y,x)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{u\sqrt{u}} & \frac{-xy}{u\sqrt{u}} \\ \frac{-xy}{\sqrt{u}u} & \frac{x^2}{u\sqrt{u}} \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$u = u(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$

② Max/min og andrederivert-testen

$\boxed{\max/\min\ f(x,y)}$

optimering uten bibetingelser

Resultat:

Hvis $f(x,y)$ har et maks-pkt eller min-pkt, så er det enten

i) stasjonært pkt for f $\quad f'_x = 0,\ f'_y = 0$

ii) et pkt der enten f'_x eller f'_y ikke fins

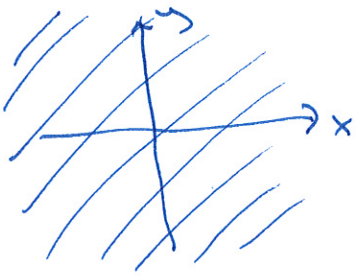
iii) et randpkt for D_f

Pkt av typen i), ii), iii) kalles kandidat for max/min (kandidatpkt).

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2 \leftarrow$ alle (x,y)

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x = 0 \\ f'_y &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Stasj. pkt: $(0,0)$



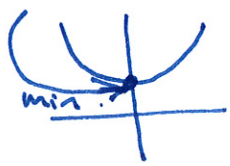
Ingen pkt av type ii) eller iii).

Eks $f(x)$

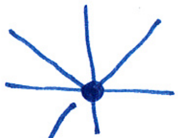
i) $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$x = 0$ stasj. pkt.



ii) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

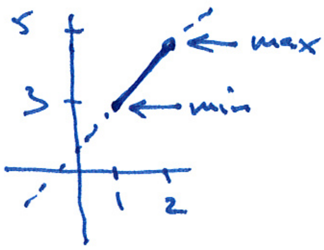


$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$f'(0)$ fins ikke

$x = 0$ min.

iii) $f(x) = 2x + 1$, $1 \leq x \leq 2$



Randpkt for D_f: $x = 1$, $x = 2$

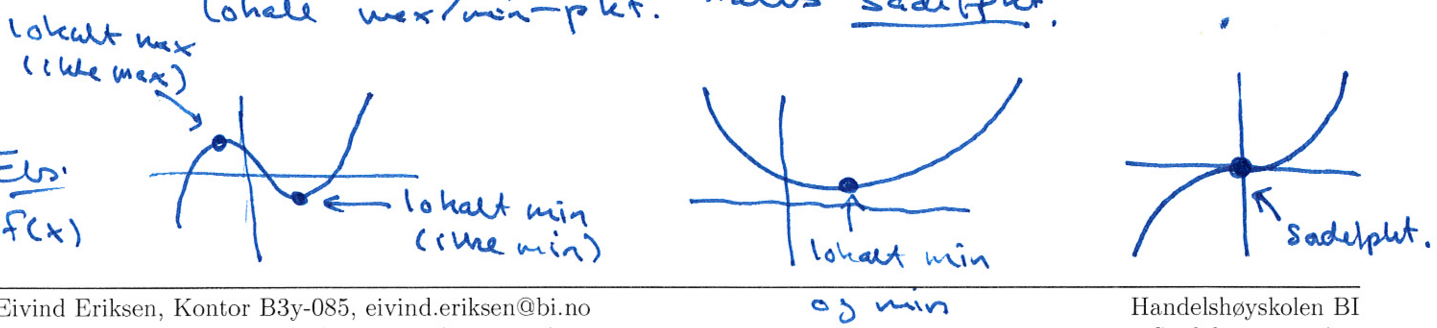
Metode for å finne max/min $f(x,y)$

1. Finn stasjonære pkt for f : $\left\{ f'_x = 0, f'_y = 0 \right.$
2. Sjekk om det fins kandidatpkt av type (ii) eller (iii) : $\left\{ \begin{array}{l} f'_x \text{ eller } f'_y \text{ fins ikke} \\ (x,y) \text{ randpkt for } D_f \end{array} \right.$
3. Klassifisere kandidatpkt som lokalt maks/lokalt min/sadelpkt.
4. Avgjøre om lokalt maks/min-pkt er globale maks/min-pkt.

Ikke tid til å snakke om dette idag.

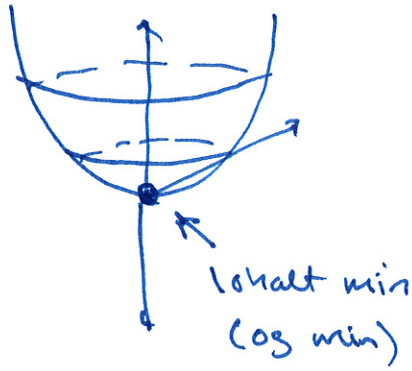
Defn: Et pkt (a,b) er et lokalt min-pkt for f hvis $f(a,b) \leq f(x,y)$ for alle (x,y) nær (a,b), og et lokalt max-pkt for f hvis $f(a,b) \geq f(x,y)$ for alle (x,y) nær (a,b). Alle kandidatpkt som ikke er lokale max/min-pkt. kalles sadelpkt.

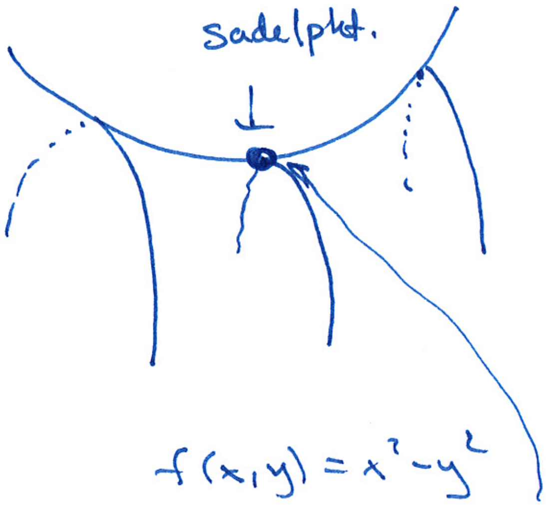
Eks: $f(x)$



Ek:

$f(x,y)$





$f = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$f'_x = 2x = 0$ $\quad x = 0$

$f'_y = -2y = 0$ $\quad y = 0$

$f''_{xx} = 2$

$f''_{yy} = -2$

Andrederivert-testen:

Hvis (a,b) er et stasjonært pkt for f, så kan vi se på

$$H(f)(a,b) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Da har vi:

i) $|H(f)(a,b)| = AC - B^2 > 0$ og $A > 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt min

ii) $|H(f)(a,b)| = AC - B^2 > 0$ og $A < 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt maks

iii) $|H(f)(a,b)| = AC - B^2 < 0$ $\Rightarrow (a,b)$ sadelpkt

Merk: $AC - B^2 > 0 \Rightarrow AC > B^2 \geq 0 \Rightarrow AC > 0 \Rightarrow A > 0, C > 0$ eller $A < 0, C < 0$

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y &= -3x + 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{regner} \ldots \Rightarrow (x,y) = (0,0), (1,1)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = AC - B^2 = 0^2 - (-3)^2 = -9 < 0$

Sadelpkt

$(1,1)$: $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$

$A = 6,\ C = 6 > 0$

Lokalt min

er dette globalt min?