	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning	[E] 7.7	Oppgaveark 44-45: 7de
2	Nivåkurver og bibetingelser	[E] 7.7	
2	Bibetingelser gitt ved likninger	[E] 7.7	

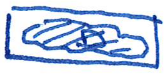
1 Repetisjon: max/min $f(x,y)$ når $\begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$

obj. fn. bibetingelser

D: pkt (x,y) som oppfyller alle bibetingelser

Ekstremverdisetningen:

Hvis D er $\underbrace{\text{lukket } (= \leq \geq) \text{ og begrenset}}_{\text{kompakt}}$, så har f et maks/min på D.

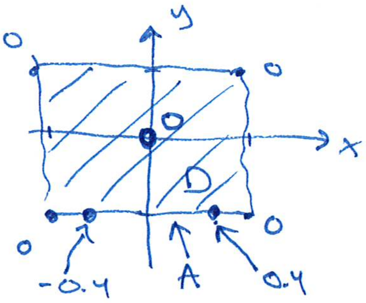


Kandidat for max/min:

Randpkt for D + indre pkt i D slik at $\begin{cases} \text{stasjonært pkt for } f \\ \text{pkt der } f'_x \text{ eller } f'_y \text{ ikke fins} \end{cases}$

Oppgave 7

d) max/min $f(x,y) = xy(x^2-y^2) = x^3y - xy^3$
når $-1 \leq x,y \leq 1$



D kompakt ⇒ det fins max/min.

Stasjonære pkt:

$f'_x = 3x^2y - y^3 = y(3x^2-y^2) = 0$

$f'_y = x^3 - 3xy^2 = x(x^2-3y^2) = 0$

$(x,y) = \underline{(0,0)}$ $f=$

Randpkt: Hjørner $\begin{Bmatrix} (1,1) \\ (1,-1) \\ (-1,1) \\ (-1,-1) \end{Bmatrix} = \underline{(\pm 1, \pm 1)}$ $f=0$

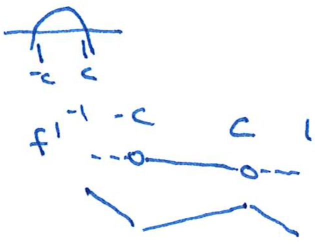
A: $y=-1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$

$f = -x(x^2-1) = -x^3+x$

$f' = -3x^2+1 = 0$

$x^2 = 1/3$

$x = \pm\sqrt{1/3}$



$c = \frac{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.6$

max på A: $x=-1 \quad f=0$

$x = c \quad f = -c(-2/3) = \frac{2}{3}c \simeq 0.4$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

min på A: $x=-c \quad f = c(-2/3) = -\frac{2}{3}c \simeq -0.4$

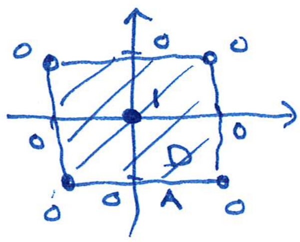
$x=1 \quad f=0$

Maks på A: $f \simeq 0.4$ Min på A: $f \simeq -0.4$

Tilsvarende på B, C, D: $f_{max} \simeq 0.4$ $f_{min} \simeq -0.4$

e) max/min $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1) = x^2y^2-x^2-y^2+1$

når $-1 \leq x, y \leq 1$



D kompakt $\Rightarrow$ fins max/min

Stasjonære pkt:

$f'_x = 2xy^2-2x = 2x(y^2-1) = 0$

$f'_y = 2x^2y-2y = 2y(x^2-1) = 0$

$(x,y) = (0,0)$, $\cancel{(\pm1, \pm1)}$

$f=1$ $\quad \cancel{f=0}$

$f_{max} = 1$

$f_{min} = 0$

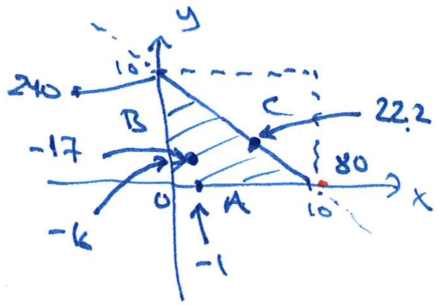
Randpkt: A: $y=-1$, $-1 \leq x \leq 1$, $f=0$ $\quad$ B, C, D: $f=0$

② Nivåkurver og bibetingelser

Eks: max/min $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 16y$

når $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 10$

(Utregning = Rep. fra Forel. 45)



Stasj. pkt:

$f'_x = 2x - 2 = 0 \quad x = 1$
$f'_y = 8y - 16 = 0 \quad y = 2$
$\Big\} \ (x,y) = \underline{(1,2)}$

$f = -1 - 16 = \underline{-17}$

$x + y = 10 \quad y = 10 - x$

D er kompakt

$\Rightarrow$ det fin max/min

Randpkt:

A: $y = 0 \quad f = x^2 - 2x$

$f' = 2x - 2 = 0 \quad x = 1$

B: $x = 0 \quad f = 4y^2 - 16y$

$f' = 8y - 16 = 0 \quad y = 2$

C: $x + y = 10$, $y = 10 - x$

$f = x^2 - 2x + 4(10-x)^2 - 16(10-x)$

$= x^2 - 2x + 4(100 - 20x + x^2) - 16(10 - x)$

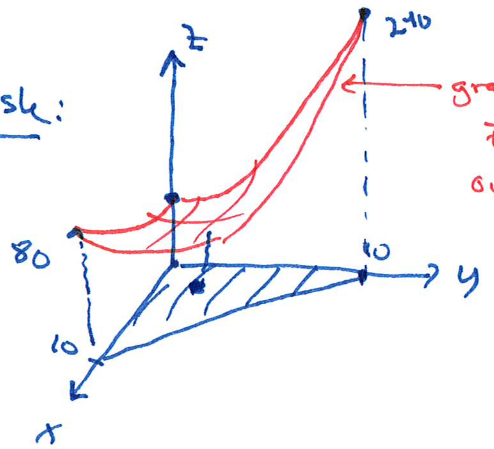
$= 5x^2 - 66x + 240$

$f' = 10x - 66 = 0$

$x = \underline{6.6}$

$f(6.6) = \underline{22.2}$

Geometrisk:



grafen til $z = f(x,y)$ over trekanten D

Med nivåkurver:

D: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 10$

$f = x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = c$

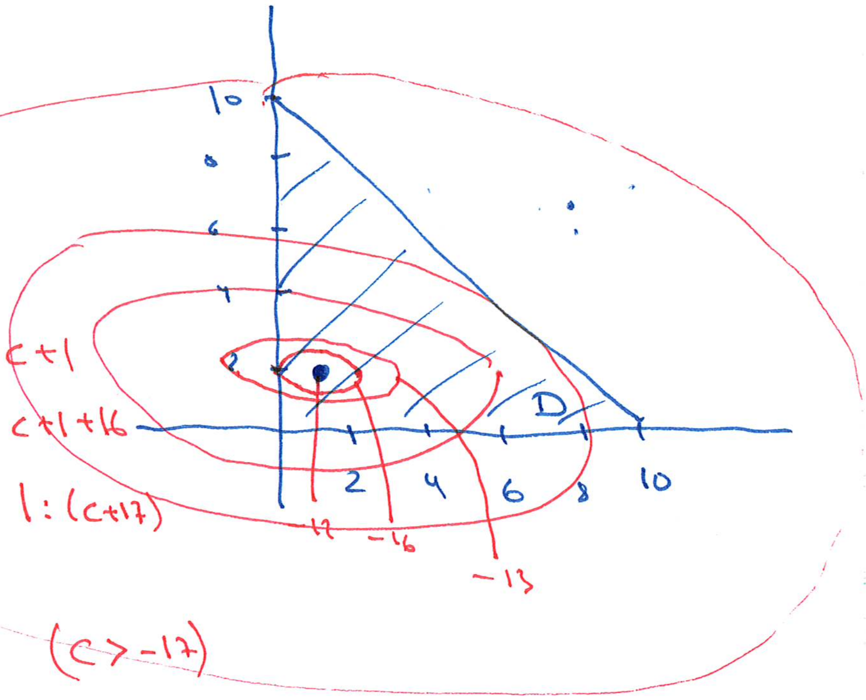
$x^2 - 2x + 1 + 4(y^2 - 4y \quad) = c + 1$

$(x-1)^2 + 4(y^2 - 4y + 4) = c + 1 + 16$

$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = c + 17 \quad | : (c+17)$

$$\frac{(x-1)^2}{c+17} + \frac{4(y-2)^2}{c+17} = 1 \qquad (c > -17)$$

$$\frac{(x-1)^2}{c+17} + \frac{(y-2)^2}{(c+17)/4} = 1$$



$c > -17$: ellipse, sentr. $(1,2)$, halvakser $a = \sqrt{c+17}$, $b = \sqrt{c+17}/2$

$c = -17$: pkt $(x=1, y=2)$

$c < -17$: ingen kurve

$\underline{c = -17}$: $(1,2)$

$c = -16$: ellipse $a = 1,\ b = 1/2$

$c = -13$: $a = 2,\ b = 1$

Geometrisk: $f_{min} = f(1,2) = \underline{\underline{-17}}$

f_{max} ser ut til å være $f(0,10) = \underline{240}$

③ Bibetingelser gitt ved likninger:

Eks: i) max/min $f(x,y) = xy$ når $x+y=4$

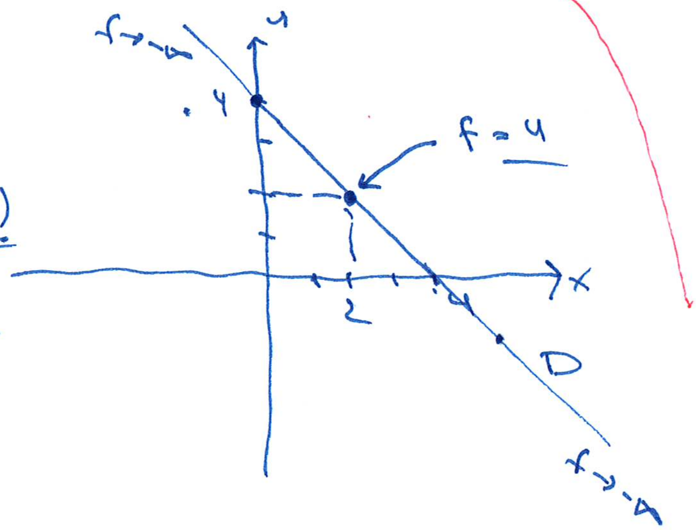
ii) —— " —— når $x^2+y^2=4$

i) D: $x+y=4$
$y = 4-x$

lukket men ikke begrenset

$f_{max} = 4$
i $(x,y) = (2,2)$

ingen minimum



Kandidatpkt:

Randpkt = alle pkt i D

Alt I: D: $x+y=4$
$y = 4-x$.

sett inn i f

$f = xy = x(4-x) = -x^2+4x$

funksjon i én variabel
bibetingelsen er automatisk oppfylt.

Max/min $-x^2+4x$:

$(-x^2+4x)' = -2x+4 = 0$

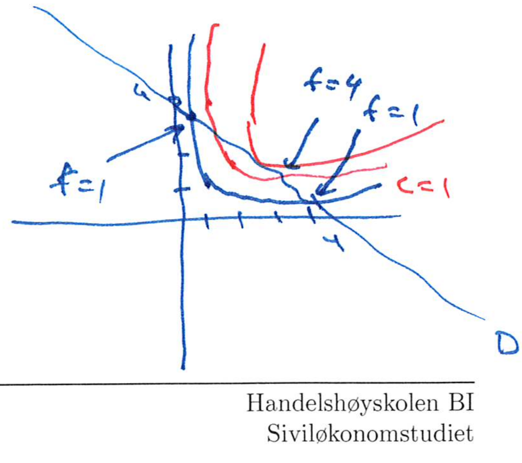
$\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$ $x = 2$ max

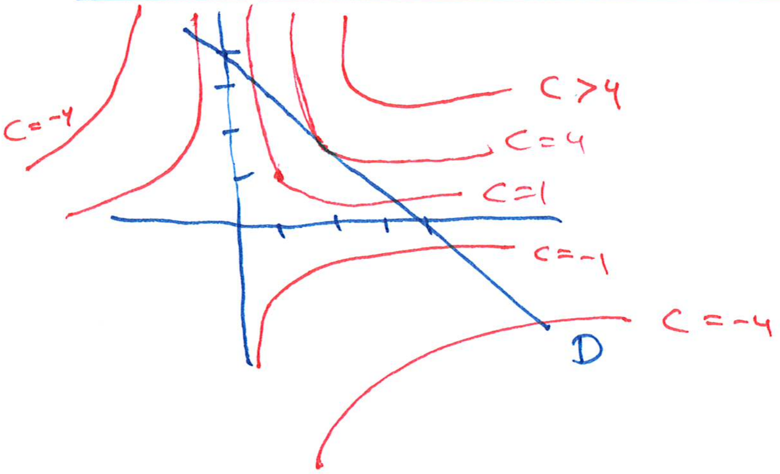
Alt. 2: Nivåkurver for f

$f(x,y) = xy = c$

$c=1$: $xy=1$ $y = 1/x$

$c=4$: $xy=4$ $y = 4/x$

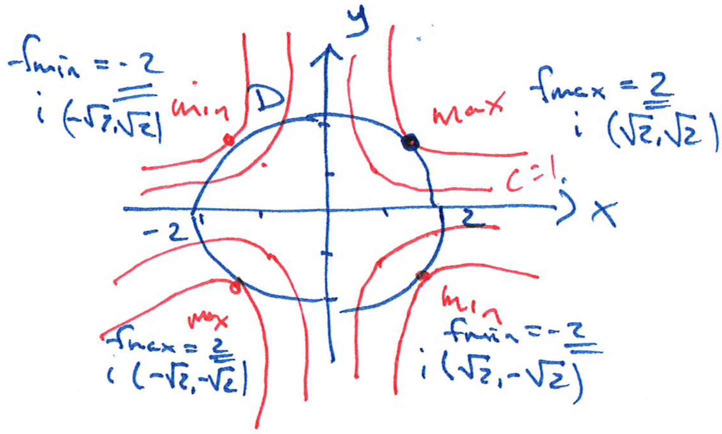




ii) max/min $f = xy$

når $x^2+y^2=4$

$D: x^2+y^2=4$ sirkel



$x^2+y^2=4$

$y^2=4-x^2$

$y=\pm\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-x^2}$

$y>0$

sett inn i f

$f = xy = x\sqrt{4-x^2}, \quad -2\le x\le 2$

$f' = 1\cdot(4-x^2)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cancel{2}x)$

$= (4-x^2)^{1/2} - x^2(4-x^2)^{-1/2}$

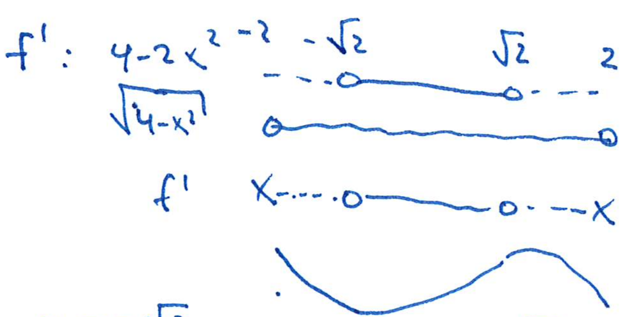
$= \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot(4-x^2)^{1/2}}{1\cdot(4-x^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$

$= \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'=0$: $4-2x^2=0$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$



min: $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$

$f_{min} = -2$

max: $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$

$f_{max}=2$

Tilsvarende for $y<0$