MET1180, forelesning 5, 5. sept. 2024, Runar Ile

Plan
1. Regulære kontantstrømmer
2. Uendelige geometriske rekker og grenseverdier
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

1. Regulære kontantstrømmer

Et fast beløp betales hver termin. Like lange terminer.

Eks Annuitetslån (nåverdien av kontantstrømmen = lånebeløpet)

Eks Sparing med et fast beløp hver termin. (fremtidsverdien gir oppsparte midler)

– begge gir geometriske rekker

Eks (Fagoppg. 2019h, oppg 6a)

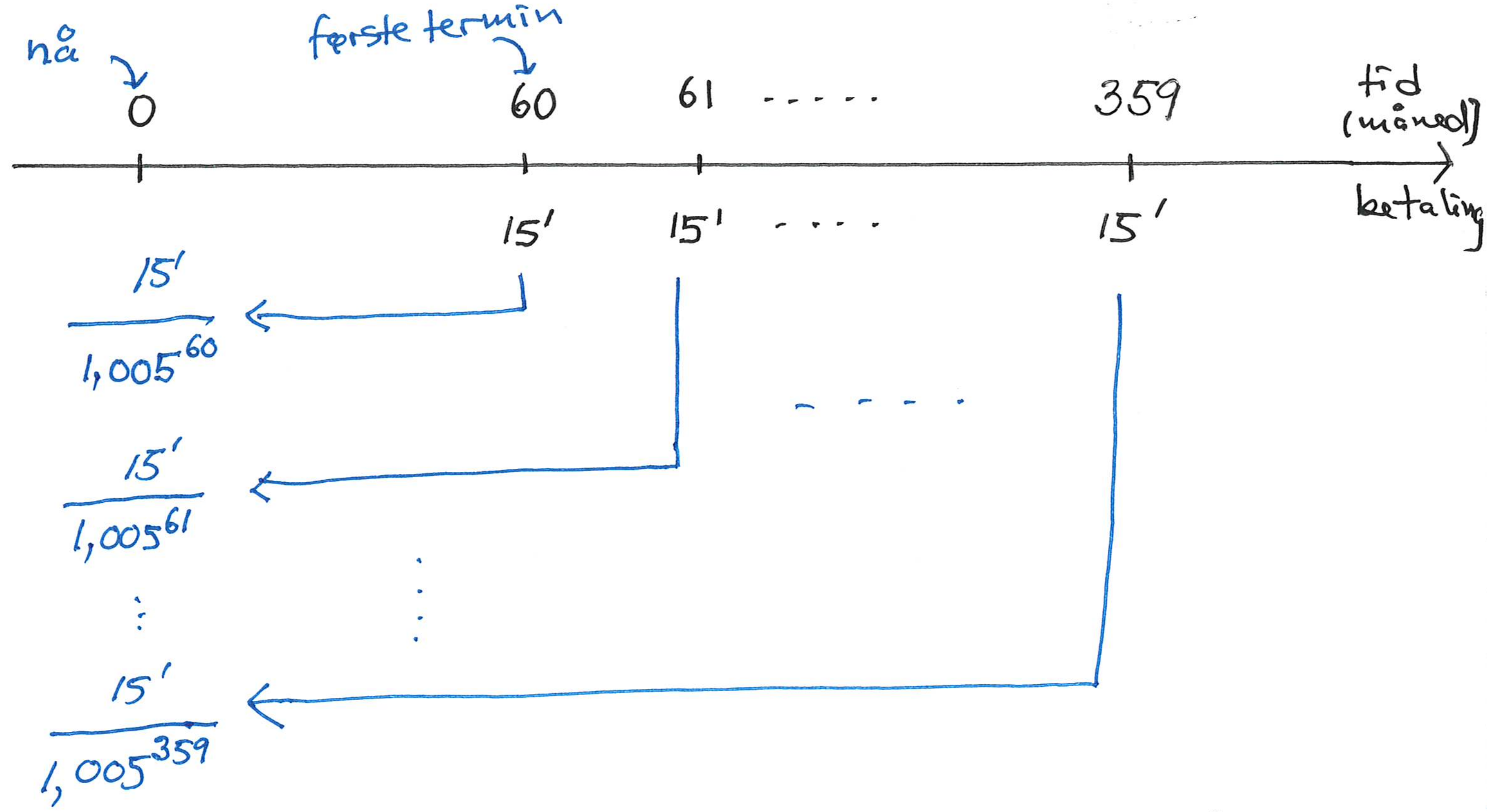
Kåre vurderer et boliglån med
- månedlige terminer over 25 år
- han regner med å kunne betale 15000/mnd
- første termin om 5 år
- nominell rente 6% med månedlig forrentning

i) Finn den geom. rekken som gir nåverdien til kontantstrømmen.

ii) Beregn ~~hvor~~ mye Kåre kan låne.

Løsning Månedsrente $= \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% = 0.005$

Antall terminer $12 \cdot 25 = 300$



Summen (nåverdien) er en geom. rekke

med $a_1 = \dfrac{15'}{1{,}005^{359}}$, $k = 1{,}005$, $n = 300$

$$\text{Nåverdi} = \text{Lånebeløp} = \frac{15'}{1{,}005^{359}} \cdot \frac{1{,}005^{300} - 1}{0{,}005}$$

$$= \underline{\underline{1\,734\,620{,}76}}$$

---

2. Uendelig geom. rekker og grenseverdier

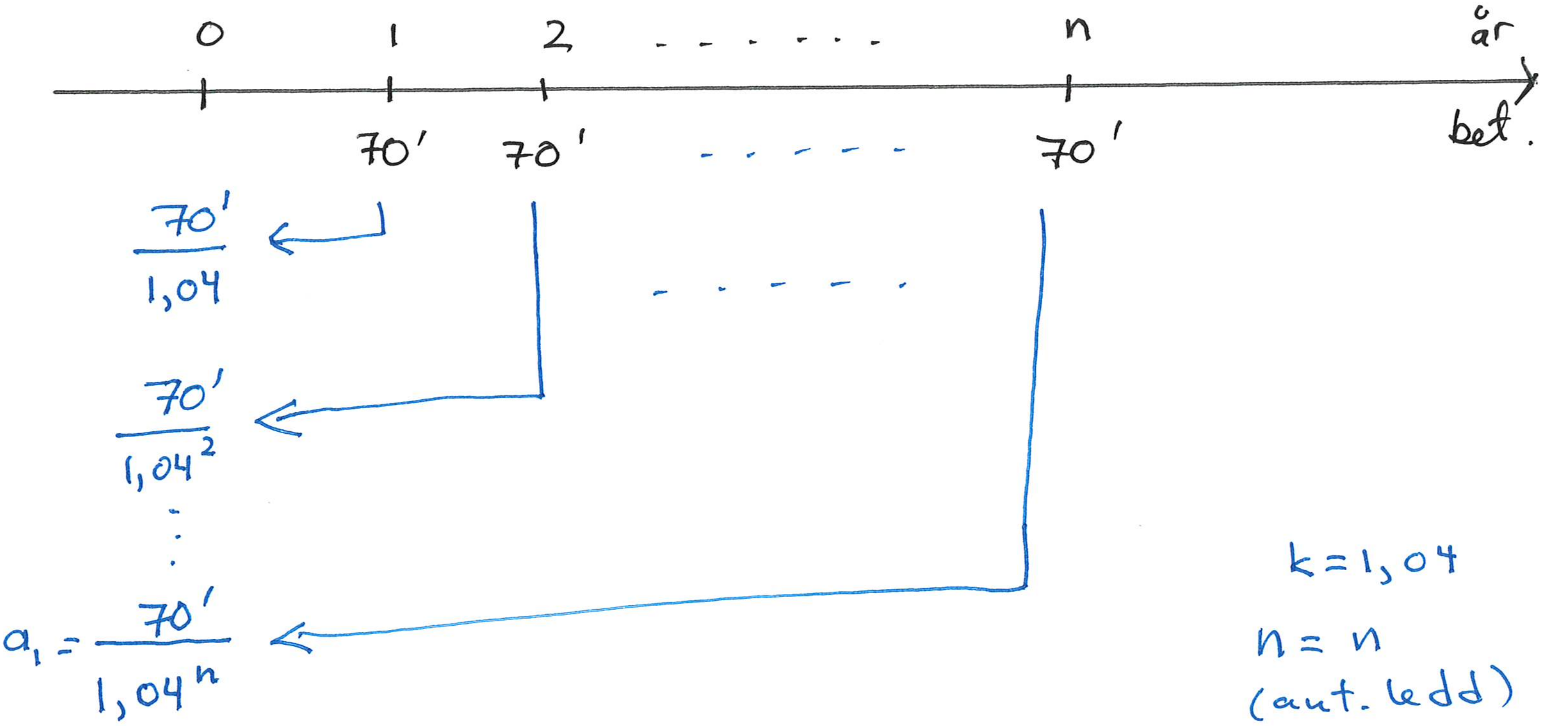
Eks Annuitet : 70'

rente : 4 %

Ant. terminer : n (år)

Første betaling : 1 år fra nå

Lånebeløpet er da nåverdien til kontantstrømmen.



$k = 1,04$

$n = n$
(ant. ledd)

Formelen for en geom. rekke gir

$$\frac{70'}{1,04^n}\cdot\frac{1,04^n-1}{0,04} = \frac{70'\cdot(1,04^n-1)}{0,04\cdot 1,04^n}$$

$$= \frac{70'}{0,04}\cdot\frac{1,04^n-1}{1,04^n} = \frac{70'}{0,04}\cdot\left(1-\frac{1}{1,04^n}\right)$$

nærmer seg 0 når n blir større og større uten grenser ($n \to \infty$)

Så hele brøken nærmer seg

$$\frac{70'}{0,04}\cdot 1 = \frac{70'}{0,04} = \underline{\underline{1,75 \text{ mill}}}$$

<u>Konklusjon</u> Hvis du betaler banken 70000 hvert år i all fremtid, kan banken låne deg 1,75 mill til 4% rente.

Start: 9.00

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

Eks Du setter inn 1000 på en konto med 12% nominell rente. Pengene står ett år.

Forrentning	Balanse etter ett år
Årlig	$1000 \cdot 1{,}12 = 1120{,}00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1{,}06^2 = 1123{,}60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
Månedlig	$1000 \cdot 1{,}01^{12} = 1126{,}83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{365}\right)^{365} = 1127{,}47$

Mønster: Med n terminer får vi $1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{n}\right)^n$

Eulers tall: $e = 2{,}718281\ldots$

1 $\boxed{e^x}$

Beregner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

1000 $\boxed{\times}$ 0,12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Eulers tall er definert som grenseverdien til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ når n blir større og større (uten grenser)

Skriver $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

Etter 1 år med 12% nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet på 1000 vokst til $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

den årlige vekstfaktoren

EKS $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692\ldots$

$\left(1+\frac{1}{1\text{ mill}}\right)^{1\text{ mill}} = 2,718280\ldots$

Tilbake til eks. med 12 % :

$$\left(1+\frac{0,12}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^n$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^{\frac{n}{0,12}}}_{\text{nærmer seg } e \text{ når } n \to \infty}\Bigg]^{0,12} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{0,12}$$

Så $1000 \cdot \left(1+\frac{0,12}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1000 \cdot e^{0,12}$

Den effektive renten (relativ endring på ett år)

er $e^{0,12} - 1 = 0,1275 = 12,75\%$

EKS Du setter 10 mill. på en konto med 2,8 % (nominell) rente.

Beregn balansen etter 5 år

a) Med årlig forrentning

b) Med kontinuerlig forrentning

c) Bestem den effektive renten hvis det er kontinuerlig forrentning.

Løsning

a) Vekstfaktor for ett år 1,0280

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill} \cdot 1{,}0280^5$

$= \underline{\underline{11{,}48 \text{ mill}}}$

b) Vekstfaktor for ett år: $e^{0,028} = 1{,}0284$

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill} \cdot (e^{0,028})^5$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,028 \cdot 5}$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,140}$

$= \underline{\underline{11{,}50 \text{ mill}}}$

c) Effektiv rente er

$e^{0,028} - 1 = 1{,}0284 - 1 = \underline{\underline{2{,}84\,\%}}$