

# MET1180 Matematikk for siviløkonomer

## Høst 2024

### Oppgaver

*... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*

R. Lucas

## Forelesning 23 – 24

### Kap 4.9-10: Elastisitet. Linearisering. Taylorpolynomer.

[L] 4.9 3-4, 7-8

Flervalgseksamen 2018h oppg 10, 13

[L] 4.10 1-7

Flervalgseksamen 2019v oppg 11

Flervalgseksamen 2019h oppg 11

### Oppgaver for veiledningstimene torsdag 14/11 kl 10-16+.

**Oppgave 1** La  $p$  være prisen på en vare og  $D(p)$  etterspørselen (= antall solgte enheter). Bestem den relative prisendringen, den relative etterspørselsendringen og priselastisiteten. Avgjør om etterspørselen er elastisk, uelastisk eller nøytralelastisk.

- a)  $D(30) = 40$  og  $D(30,5) = 39$
- b)  $D(20) = 101$  og  $D(21) = 100,95$
- c)  $D(10) = 24,648$  og  $D(10,01) = 24,623$

**Oppgave 2** La  $p$  være prisen på en vare og  $D(p)$  etterspørselen (= antall solgte enheter). Beregn den momentane priselastisiteten  $\varepsilon(p) = El_p(D(p))$ . Bestem prisen  $p$  slik at etterspørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

- a)  $D(p) = 100 - 2p$  med  $0 < p < 50$
- b)  $D(p) = 100 + \frac{20}{p}$  med  $p \geq 1$
- c)  $D(p) = 67e^{-0.1p}$  med  $p > 0$
- d)  $D(p) = 100 + \frac{900}{p^2}$  med  $p \geq 1$
- e)  $D(p) = 53e^{-0.02p^2}$  med  $p > 0$

### Oppgave 3

- a) Finn Taylorpolynomene  $P_1(x), \dots, P_4(x)$  av grad 1 – 4 til funksjonen  $f(x) = e^x$  ved 0.
- b) Beregn  $P_1(1), \dots, P_4(1)$  og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til  $f(1) = e$ .

### Oppgave 4

- a) Finn Taylorpolynomene  $P_1(x), \dots, P_4(x)$  av grad 1 – 4 til funksjonen  $f(x) = \ln(x)$  ved 1.
- b) Beregn  $P_1(2), \dots, P_4(2)$  og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til  $f(2) = \ln(2)$ .

**Oppgave 5** Vi har en funksjon  $f(x)$  med  $f(50) = 100$ ,  $f'(50) = 1$  og  $f''(50) = -0,4$ .

- a) Bestem Taylorpolynommet  $P_2(x)$  til  $f(x)$  ved 50.
- b) Bruk  $P_2(x)$  til å gi en tilnærmet verdi for  $f(52)$ .

**Oppgave 6** La  $P_1(x), \dots, P_4(x)$  være Taylorpolynomene i oppgave 3. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_1(x)}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_2(x)}{x^3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_3(x)}{x^4}$$

**Oppgave 7** La  $P_1(x), \dots, P_4(x)$  være Taylorpolynomene i oppgave 4. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_1(x)}{(x-1)^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_2(x)}{(x-1)^3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_3(x)}{(x-1)^4}$$

**Oppgave 8** (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)

Vi betrakter priselastisiteten  $\varepsilon = \varepsilon(p)$  for etterspørselsfunksjonen av en vare gitt ved  $D(p) = 120 - 8p$ . Da er:

- (A)  $\varepsilon > -1$  for  $p = 7,5$
- (B)  $\varepsilon > -1$  for  $p < 7,5$
- (C)  $\varepsilon > -1$  for  $p > 7,5$
- (D)  $\varepsilon > -1$  for alle verdier av  $p$
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

**Oppgave 9** (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)

Etterspørsel etter en vare er gitt ved  $D(p) = 110 - 5p$ . Da er elastisiteten  $\varepsilon(p) = -1$  for:

- (A)  $p = 7$
- (B)  $p = 11$
- (C)  $p = \frac{16}{5}$
- (D)  $p = 22$
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

**Oppgave 10** (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)

La  $p$  være prisen på en vare med etterspørselsfunksjon  $D(p) = 100e^{-0,2p}$ . Bestem hvilke priser  $p$  som gjør at etterspørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

**Oppgave 11** (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)

Funksjonen  $f(x)$  har  $f(30) = 700$ ,  $f'(30) = 5$  og  $f''(30) = -1$ . Beregn en tilnærmet verdi til  $f(31)$ .

## Fasit

### Oppgave 1

- a) relativ prisendring er  $\frac{0,5}{30}$ , relativ etterspørselsendring er  $\frac{-1}{40}$  og priselastisiteten er  $-1,5$ , dvs elastisk  
 b) relativ prisendring er  $\frac{1}{20}$ , relativ etterspørselsendring er  $\frac{-0,05}{101}$  og priselastisiteten er  $-0,0099$ , dvs uelastisk  
 c) relativ prisendring er  $0,001$ , relativ etterspørselsendring er  $-0,001014$  og priselastisiteten er  $-1,014$ , dvs elastisk

### Oppgave 2

- a)  $\varepsilon(p) = \frac{-2p}{100-2p}$ . Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for  $p = 25$ , uelastisk for  $0 < p < 25$  og elastisk for  $25 < p < 50$ .  
 b)  $\varepsilon(p) = -\frac{1}{5p+1}$ . Etterspørselsfunksjonen er uelastisk for alle  $p \geq 1$ .  
 c)  $\varepsilon(p) = -0,1p$ . Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for  $p = 10$ , uelastisk for  $0 < p < 10$  og elastisk for  $p > 10$ .  
 d)  $\varepsilon(p) = -\frac{18}{p^2+9}$ . Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for  $p = 3$ , elastisk for  $1 \leq p < 3$  og uelastisk for  $p > 3$ .  
 e)  $\varepsilon(p) = -0,04p^2$ . Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for  $p = 5$ , uelastisk for  $0 < p < 5$  og elastisk for  $p > 5$ .

### Oppgave 3

- a)  $P_1(x) = 1 + x$ ,  $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ,  $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ ,  $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$   
 b)  $P_1(1) = 2$ ,  $P_2(1) = 2,5$ ,  $P_3(1) = \frac{8}{3} \approx 2,67$ ,  $P_4(1) = \frac{65}{24} \approx 2,71$ . Avstanden fra  $f(1) = e$  er (tilnærmet):

$$\begin{aligned} |f(1) - P_1(1)| &= |e - 2| = 0,72 \\ |f(1) - P_2(1)| &= |e - 2,5| = 0,22 \\ |f(1) - P_3(1)| &= |e - \frac{8}{3}| = 0,052 \\ |f(1) - P_4(1)| &= |e - \frac{65}{24}| = 0,0099 \end{aligned}$$

### Oppgave 4

- a)  $P_1(x) = (x - 1)$ ,  $P_2(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2}$ ,  $P_3(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$ ,  
 $P_4(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$   
 b)  $P_1(2) = 1$ ,  $P_2(2) = \frac{1}{2}$ ,  $P_3(2) = \frac{5}{6} \approx 0,83$ ,  $P_4(2) = \frac{7}{12} \approx 0,58$ . Avstanden fra  $f(2) = \ln(2)$  er (tilnærmet):

$$\begin{aligned} |f(2) - P_1(2)| &= |\ln(2) - 1| = 0,31 \\ |f(2) - P_2(2)| &= |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0,19 \\ |f(2) - P_3(2)| &= |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0,14 \\ |f(2) - P_4(2)| &= |\ln(2) - \frac{7}{12}| = 0,11 \end{aligned}$$

### Oppgave 5

- a)  $P_2(x) = 100 + (x - 50) - 0,2(x - 50)^2$   
 b)  $f(52) \approx P_2(52) = 101,2$

### Oppgave 6

- a) Dette er et  $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt  $\frac{0}{0}$ -uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \left( = \frac{f''(0)}{2} \right)$$

- b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{3x^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6} \quad \left( = \frac{f'''(0)}{3!} \right)$$

c)  $\frac{1}{24} \left( = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \right)$

**Oppgave 7**

a) Dette er et  $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt  $\frac{0}{0}$ -uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - (x - 1)}{(x - 1)^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x - 1)} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2} \left( = \frac{f''(1)}{2} \right)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - [(x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2}]}{(x - 1)^3} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - [1 - (x - 1)]}{3(x - 1)^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{6(x - 1)} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{6} = \frac{1}{3} \left( = \frac{f'''(1)}{3!} \right)$$

c)  $-\frac{1}{4} \left( = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} \right)$

**Oppgave 8** (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)

B

**Oppgave 9** (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)

B

**Oppgave 10** (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)

$$\varepsilon(p) = -0,2p$$

Etterspørselen er *elastisk* for  $p > 5$ .

Etterspørselen er *uelastisk* for  $0 < p < 5$ .

Etterspørselen er *nøytralelastisk* for  $p = 5$ .

**Oppgave 11** (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)

Taylorpolynomet av andre grad til  $f(x)$  i 30 er  $P_2(x) = 700 + 5(x - 30) - 0,5(x - 30)^2$ . Dermed er  $f(31) \approx P_2(31) = 704,5$ .