

## Veiledningsoppgaver

### Oppgave 1.

Lag figur som viser det bestemte integralet som et areal. Bestem arealet ved integrasjon og ved å bruke figuren.

a)  $\int_0^4 3 \, dx$

b)  $\int_0^8 (10 + 3x) \, dx$

c)  $\int_{-2}^2 |x| \, dx$

d)  $\int_{-1}^3 x - |x| \, dx$

### Oppgave 2.

Finn arealet til området under grafen til funksjonen  $f$  på intervallet  $[a,b]$ , og vis dette området på figur:

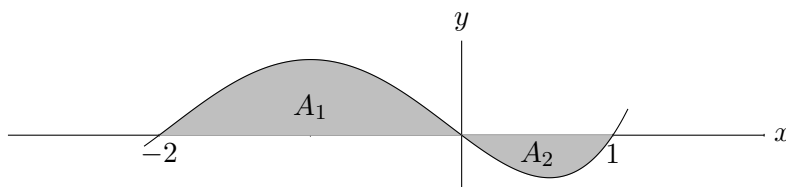
a)  $f(x) = x^2$ ,  $[a,b] = [-1,1]$

b)  $f(x) = x^3 + 3x - 4$ ,  $[a,b] = [1,4]$

c)  $f(x) = x \ln(x)$ ,  $[a,b] = [1,2]$

### Oppgave 3.

Grafen til en funksjon  $f$  er vist i figuren nedenfor. Bestem arealet  $A_1$  når arealet  $A_2 = 22/15$  og  $\int_{-2}^1 f(x) \, dx = \frac{18}{5}$ .



### Oppgave 4.

Finn arealet til området  $R$ , og vis  $R$  på figur:

a)  $R$  er området begrenset av grafen til  $y = \ln(2 + x)$ , linjen  $y = 2$ , og  $y$ -aksen.

b)  $R$  er området begrenset av grafene til  $y = x$  og  $y = x^2$ .

### Oppgave 5.

Et glass har høyde  $H = 10$ , og er formet slik at det horisontale tverrsnittet i høyde  $h$  er en sirkel med radius  $r = 0.10h^2$  når  $0 \leq h \leq H = 10$ . Lag en figur som viser glasset sett fra siden, og regn ut volumet som glasset rommer. Høyden  $H$  og radius  $r$  er oppgitt i cm.

### Oppgave 6.

Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntektstrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter  $t$  år. Regn ut den samlede inntekten i løpet av de neste 10 årene. Hvor mye av denne inntektsstrømmen kommer i løpet av de første to årene?

### Oppgave 7.

Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntektstrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter  $t$  år. Regn ut nåverdien av inntektsstrømmen i løpet av de neste 10 årene når vi bruker kontinuerlig forrentning og diskonteringsrente  $r = 10\%$ . Hvor stor del av denne nåverdien stammer fra leien i løpet av de første to årene?

### Oppgave 8.

Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen  $p = f(q)$  og den (omvendte) tilbudsfunksjonen  $p = g(q)$  er gitt ved

$$f(q) = 200 - 2q \quad \text{og} \quad g(q) = q + 20$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

### Oppgave 9.

Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen  $p = f(q)$  og den (omvendte) tilbudsfunksjonen  $p = g(q)$  er gitt ved

$$f(q) = \frac{6000}{q + 50} \quad \text{og} \quad g(q) = q + 10$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

### Oppgave 10.

Skriv ned en sum (basert på  $n = 10$  delintervaller) som tilnærmer det bestemte integralet  $\int_0^1 (1 - x^2) dx$ , og vis det bestemte integralet og tilnærmingen som arealer i en figur.

### Oppgave 11.

Et toalettrull har indre radius  $r = 2$  cm og ytre radius  $R = 7$  cm. Tykkelsen på papiret er 0.5 mm. Hva er lengden på papiret når vi har rullet den helt ut?

## Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*

Oppgaveboken [O]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

---

Oppgaver: [E] 5.6.3 - 5.6.5, 5.7.1 - 5.7.6

Fullstendig løsning: Se [O] Kap 5.6 - 5.7

---

## Svar på veiledningsoppgaver

### Oppgave 1.

a) 12

b) 176

c) 4

d) 1

**Oppgave 2.**

a)  $2/3$

b)  $297/4 = 74.25$

c)  $2 \ln 2 - 3/4$

**Oppgave 3.**

$A_1 = 76/15$

**Oppgave 4.**

a)  $e^2 - 6 + \ln(4)$

b)  $1/6$

**Oppgave 5.**

$200\pi \approx 628$  (eller 0.63 liter)

**Oppgave 6.**

Samlet inntekt er  $2100(e^{10/7} - 1) \approx 6\,663$  millioner kr. Av dette stammer  $2100(e^{2/7} - 1) \approx 694$  millioner kr fra leie de første to årene.

**Oppgave 7.**

Nåverdi er  $7000(e^{3/7} - 1) \approx 3\,745$  millioner kr. Av dette stammer  $7000(e^{3/35} - 1) \approx 626$  millioner kr fra leie de første to årene.

**Oppgave 8.**

Likevektsprisen  $p^* = 80$ , konsumentoverskuddet er 3 600 og produsentoverskuddet er 1 800.

**Oppgave 9.**

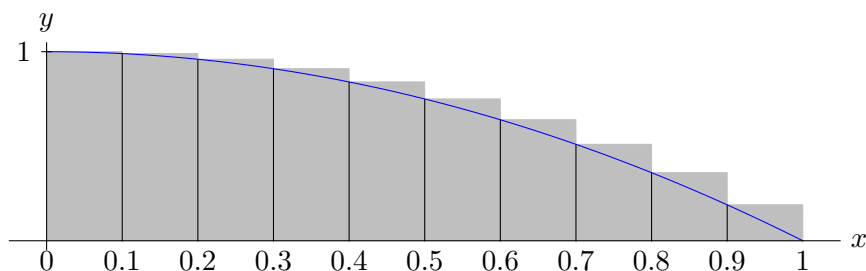
Likevektsprisen  $p^* = 60$ , konsumentoverskuddet er  $6000 \ln(2) - 3000 \approx 1159$  og produsentoverskuddet er 1250.

**Oppgave 10.**

Hvis vi deler intervallet  $[0,1]$  inn i  $n = 10$  like store delintervall, så blir delepunktene  $x_i = i/10$  for  $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Det vil si at  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/10$ ,  $x_2 = 2/10$  og så videre. Det bestemte integralet er arealet under  $f(x) = 1 - x^2$  på intervallet  $[0,1]$ . Vi kan tilnærme dette som arealet av ti rektangler, gitt ved summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^9 f(x_i) \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=0}^9 (1 - (i/10)^2) \cdot \frac{1}{10} = (1 + (1 - 1/100) + (1 - 4/100) + \dots + (1 - 81/100)) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left( 10 - \frac{0 + 1 + 4 + \dots + 81}{100} \right) = 0.715 \end{aligned}$$

Summen er vist i figuren nedenfor. Det bestemte integralet er arealet under den blå kurven, altså litt mindre enn 0.715. Vi har valgt å bruke funksjonsverdien i startpunktet i hvert delintervall som høyden på våre rektangler (det er også mulig å bruke sluttpunktet, eller gjennomsnitt av funksjonsverdi i start- og sluttpunkt. Uansett blir tilnærmingen bedre jo større  $n$  er, og grenseverdien går mot det virkelige arealet når  $n \rightarrow \infty$ ).

**Oppgave 11.**

$900\pi \approx 28.3$  m