Løsning	MET 11802 Matematikk
Dato	20. november 2015 kl 0900 - 1200

Riktige svar: D-C-C-D-A D-A-C-B-B C-D-D-C-D

Oppgave 1.

Siden det legges til rente for et halvt år i 2003, må vi multiplisere med faktoren $1+0{,}0325/2 = 1{,}01625$ for å finne balansen per 31.12.2003, og balansen x år etter 31/12/2003 er en million kroner dersom

$$500.000 \cdot 1{,}01625 \cdot 1{,}0325^x = 1.000.000$$

Løser vi denne likningen, får vi $x = \ln(2/1{,}01625)/\ln(1{,}0325) \approx 21{,}17$. Det tar dermed $x = 22$ år før balansen overstiger en million kr ved årsslutt, og det skjer dermed i 2025. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 2.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{50.000}{(1+r)^2} + \frac{50.000}{(1+r)^3} + \cdots = \frac{50.000}{(1+r)^2} \cdot \frac{1}{1-1/(1+r)} = \frac{50.000}{r+r^2}$$

med $r = 0{,}08$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 578.704 kr. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 3.

Den geometriske rekken $S(x) = 3 + x + x^2/3 + \ldots$ har $k = x/3$, og er derfor konvergent for $x = 2$, med sum

$$S(2) = 3 \cdot \frac{1}{1-2/3} = 9$$

siden $k = 2/3 < 1$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 4.

Nåverdien av etterskuddsannuiteten med diskonteringsrente r er

$$\frac{10.000}{e^r} + \frac{10.000}{e^{2r}} + \cdots = \frac{10.000}{e^r} \cdot \frac{1}{1-1/e^r} = \frac{10.000}{e^r - 1}$$

For at nåverdien skal bli 60.000 kr, må $e^r - 1 = 1/6$, og dette gir $r = \ln(7/6) \approx 0{,}154 = 15{,}4\%$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{x-8}{x^2-3x-4} - 1 = \frac{-x^2+4x-4}{x^2-3x-4} = \frac{-(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0$$

og setter opp fortegnsskjema for VS. Vi ser at løsningsmengden er $(-1{,}4)$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 6.

Likningen kan skrives $x^3 - 7x - 6 = 0$. Mulige heltallige løsninger er $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, og ved innsetting ser vi at $x = -1$ er en løsning. Dermed får vi faktoriseringen

$$(x+1)(x^2 - x - 6) = 0$$

ved polynomdivisjon, og det er to andre løsninger $x = 3$ og $x = -2$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 7.

Vi kvadrerer begge sider i likningen og får

$$1 - 2\sqrt{x} + x = x - 5 \quad \text{eller} \quad 2\sqrt{x} = 6$$

Det betyr at $\sqrt{x} = 3$, eller $x = 9$. Vi setter prøve, og ser at $x = 9$ ikke er en løsning siden VS er -2 og HS er 2. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 8.

Siden $f(2) = 3 - 4a = 0$, må $a = 3/4$. De andre nullpunktene finner vi ved polynomdivisjon, som gir

$$x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1 = (x-2)\left(x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Siden $(5/4)^2 + 4(1/2) = 25/16 + 2 > 0$, er det to andre løsninger x_2, x_3 og de har sum $x_2 + x_3 = -5/4$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 9.

Nevneren $x^2 - 4x + 3 = 0$ når $x = 1$ og $x = 3$. Siden $x = 1$ og $x = 3$ ikke gir null i telleren $x^3 - 3x^2 + x - 1$, så gir dette $a = 2$ vertikale asympoter. Vi finner den skrå asymptoten ved polynomdivisjon, som gir

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3} = x + 1 + \frac{2x - 4}{x^2 + 4x + 3}$$

og dermed er $b = 1$ og $ab = 2$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 10.

Stigningstallet til tangenten i $x = 0$ er lik $f'(0)$, og vi har at

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2+1)(x+1) - (x^4+1)(2x(x+1) + (x^2+1)\cdot 1)}{(x^2+1)^2(x+1^2)} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -1$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 11.

Elastisiteten $\mathrm{El}_p\, D(p) = -1$ når

$$\mathrm{El}_p\, D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = \frac{-9p}{240 - 9p} = -1$$

det vil si når $-9p = -(240 - 9p)$, eller $p = 240/18 = 40/3$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 12.

Funksjonen f er definert når $x \geq 0$ og $x \neq 2$. Den deriverte funksjonen er da gitt ved

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x-2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x - 2 - 2x}{2\sqrt{x}(x-2)^2} = \frac{-x-2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$$

Dermed er $f'(x) < 0$ for $x > 0,\ x \neq 2$. Derfor er ikke f voksende i noe intervall. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 13.

Den deriverte funksjonen er gitt ved

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)}$$

Dermed er $f'(x) = 0$ kun når $x = 1 + \sqrt{2}$ (siden f er definert når $x > 1$), og $x = 1 + \sqrt{2}$ er et bunnpunkt siden et fortegnsdiagram for f' viser at f er avtagende i $(1{,}1 + \sqrt{2}]$ og voksende i $[1 + \sqrt{2}, \infty)$. Minimumsverdien er

$$\ln((1+\sqrt{2})^2 + 1) - \ln(\sqrt{2}) = \ln(4 + 2\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}) = \ln \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \ln(2\sqrt{2} + 2) > 0$$

Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 14.

Den deriverte funksjonen er

$$f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2 + 2x + 3)e^x = (x^2 + 4x + 5)e^x$$

Siden $D_f = [1, \infty)$ og $f'(x) > 0$ for $x \geq 1$, så er f en strengt voksende funksjon med $V_f = [6e, \infty)$. Dermed har den en omvendt funksjon f^{-1} med $D_{f^{-1}} = V_f = [6e, \infty)$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 15.

Siden $\ln x - x + 1 \to 0$ og $x^2 - 2x + 1 \to 0$ når $x \to 1$, så er grenseverdien et ubestemt uttrykk av typen «0/0». Vi kan dermed bruke L'Hopitals regel, som gir

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x - 1}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{2x^2 - 2x}$$

Dette er igjen et ubestemt uttrykk av typen «0/0», og vi bruker L'Hopitals regel en gang til, som gir

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{4x - 2} = -1/2$$

Riktig svar er alternativ **D**.