Løsning	MET 11802 Matematikk
Dato	02. mai 2016 kl 0900 - 1200

Riktige svar: D-B-B-A-B D-C-C-A-C B-B-B-C-B

Oppgave 1.

Siden $1{,}0725^{10} > 2$ er verdien steget til mer enn det dobbelte. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 2.

Kontantstrømmen har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{75.000}{(1+r)^3} + \frac{75.000}{(1+r)^4} + \cdots = \frac{75.000}{(1+r)^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/(1+r)} = \frac{75.000}{r(1+r)^2}$$

med $r = 0{,}08$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 803.755 kr. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 3.

Den geometriske rekken $S(x) = 4 - x + x^2/4 + \ldots$ har $k = -x/4$, og er derfor konvergent for $x = 3$, med sum

$$S(3) = 4 \cdot \frac{1}{1 + 3/4} = \frac{16}{7} > 0$$

siden $-1 < k = -3/4 < 1$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 4.

Nåverdien av salggsummen med diskonteringsrente $r = 6\%$ er

$$160 \cdot e^{\sqrt{10}/3} \cdot e^{-10 \cdot 0{,}06} \approx 251{,}959$$

Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 5.

Likningen kan skrives $x(x^2 - 4) = (x^2 - 4)$, eller $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$. Løsninger er $x = 1$ og $x = \pm 2$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 6.

Vi skriver om og kvadrerer likningen, og får

$$4 - \sqrt{x} = x + 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 4 - 4x + x^2$$

Det betyr at $x^2 - 5x + 4 = 0$, som gir $x = 1$ eller $x = 4$. Vi setter prøve, og ser at kun $x = 1$ er en løsning, mens $x = 4$ ikke er en løsning. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 7.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{x^2}{3-2x-x^2}-1=\frac{2x^2+2x-3}{3-2x-x^2}=\frac{2(x-(-1+\sqrt{7})/2)(x-(-1-\sqrt{7})/2)}{-(x-1)(x+3)}>0$$

og setter opp fortegnsskjema for VS for $x>0$. Vi ser at løsningsmengden er $(\sqrt{7}-1)/2<x<1$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 8.

Siden $f(3)=27-12a-3=0$, må $a=2$. De andre nullpunktene finner vi ved polynomdivisjon, som gir

$$x^3-8x-3=(x-3)(x^2+3x+1)=0$$

Siden $3^2-4=5>0$, er det to andre løsninger $x=(-3\pm\sqrt{5})/2$ og de er begge negative. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 9.

Polynomdivisjon gir at

$$f(x)=\frac{x^3-ax^2+x-1}{x^2-4x+b}=x+(4-a)+\frac{(1-b+4(4-a))x-1-b(4-a)}{x^2-4x+b}$$

Siden $y=x+1$ er skrå asymptote, må $a=3$. For at det skal være kun en vertikal asymptote $x=2$, må $b=4$. Vi sjekker at $a=3$ og $b=4$, som gir

$$f(x)=x+1+\frac{x-5}{(x-2)^2}$$

har de riktige asymptotene. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 10.

Stigningstallet til tangenten i $x=2$ er lik $f'(2)$, og vi har at

$$f'(x)=2xe^{2-x}+x^2e^{2-x}(-1)-0=(2x-x^2)e^{2-x}\quad\Rightarrow\quad f'(2)=0$$

Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 11.

Den deriverte funksjonen er $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$, og dermed er f voksende for $x\geq 1$ og avtagende for $x\leq 1$. På $D_f=[a,\infty)$ har derfor f en omvendt funksjon om $a\geq 1$, og kun da. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 12.

Den deriverte funksjonen er gitt ved

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}\cdot(2x+4)=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$$

Siden x^2+4x+5 ikke har noen nullpunkt og har verdi $5>0$ i $x=0$, er $x^2+4x+5>0$ for alle x. Dermed er $f'(x)\geq 0$ for $x\geq -2$, og negativ ellers, og f er voksende på $[-2,\infty)$ og avtagende på $(-\infty,-2]$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 13.

Siden $x^2 - x + 1 \to \infty$ og $xe^x - 1 \to \infty$ når $x \to \infty$, så er grenseverdien et ubestemt uttrykk av typen «∞/∞». Vi kan dermed bruke L'Hopitals regel, som gir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{xe^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{e^x + xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x + (e^x + xe^x)} = 0$$

Vi har brukt L'Hopitals regel på nytt ovenfor, siden vi også har at $2x - 1 \to \infty$ og $e^x + xe^x \to \infty$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 14.

Den deriverte funksjonen er

$$f'(x) = (2x - 6)e^x + (x^2 - 6x - 15)e^x = (x^2 - 4x - 21)e^x$$

Den deriverte er alltid definert, og har nullpunkter gitt ved $(x^2 - 4x - 21 = 0$, som gir $x = 7$ og $x = -3$. Vi ser fra fortegnslinjen til $f'(x)$ at $x = -3$ er et lokalt maksimumspunkt, $x = 7$ er et lokalt minimumspunkt, og det er ingen andre kandidater til maksimum eller minimum for f. Siden

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

har f ikke noe maksimum, og $x = 7$ er et minimumspunkt siden $f(7) = -18e^7 < 0$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 15.

For å finne den deriverte og dobbelderiverte funksjonen, lønner det seg å skrive

$$f(x) = (x + 2)\sqrt{x + 1} = (x + 1)\sqrt{x + 1} + 1 \cdot \sqrt{x + 1} = (x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{1/2}$$

Da får vi

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x + 1)^{1/2} + \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2}$$

og

$$f''(x) = \frac{3}{4}(x + 1)^{-1/2} - \frac{1}{4}(x + 1)^{-3/2} = \frac{3(x + 1) - 1}{4(x + 1)^{3/2}} = \frac{3x - 2}{4(x + 1)^{3/2}}$$

Vi ser at $x = 2/3$ er et vendepunkt for f. Riktig svar er alternativ **B**.