Løsning	MET 11802 Matematikk
Dato	7. desember 2016 kl 0900 - 1200

Riktige svar: C-C-D-B-A B-B-B-A-C D-B-A-D-B

Oppgave 1.

Siden det legges til rente for et kvartal i 2015, må vi multiplisere med faktoren $1 + 0{,}02/4 = 1{,}005$ for å finne balansen per 31.12.2015, og balansen x år etter 31/12/2015 er 250.000 kr dersom

$$200.000 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}02^x = 250.000$$

Løser vi denne likningen, får vi $x = \ln(1{,}25/1{,}005)/\ln(1{,}02) \approx 11{,}02$. Det tar dermed $x = 12$ år før balansen overstiger 250.000 kr ved årsslutt, og det skjer dermed i 2027. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 2.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{100.000}{(1+r)^3} + \frac{100.000}{(1+r)^4} + \cdots = \frac{100.000}{(1+r)^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/(1+r)} = \frac{100.000}{r(1+r)^2}$$

med $r = 0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 826.446 kr. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 3.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{100.000}{(1+r)^3} + \frac{100.000 \cdot 1{,}02}{(1+r)^4} + \cdots = \frac{100.000}{(1+r)^3} \cdot \frac{1}{1 - 1{,}02/(1+r)} = \frac{100.000}{(r-0{,}02)(1+r)^2}$$

med $r = 0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 1.033.058 kr. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 4.

Månedsbeløpet A må tilfredsstille likningen

$$\frac{A}{(1+r)^{60}} + \frac{A}{(1+r)^{61}} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^{299}} = 3.000.000$$

med $1 + r = 1 + 2{,}40\%/12 = 1{,}002$. Dette gir at

$$\frac{A}{(1{,}002)^{60}} \cdot \frac{1 - (1/1{,}002)^{240}}{1 - 1/1{,}002} = 3.000.000 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3.000.000 \cdot 0{,}002 \cdot 1{,}002^{299}}{1{,}002^{240} - 1}$$

Dermed er $A \cong 17.722$ kr, og de samlede rentene er gitt ved

$$240 \cdot A - 3.000.000 \cong 1.253.284$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{6-x}{x^2+4} - 1 = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2+4} = \frac{-(x+2)(x-1)}{x^2+4} \geq 0$$

og setter opp fortegnsskjema for VS. Vi ser at løsningsmengden er $[-2{,}1]$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 6.

Likningen kan skrives $x^2 - x - 1 = 0$ etter muliplikasjon med fellesnevner $x(x+1)$. Dermed er

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Det er en positiv og en negativ løsning. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 7.

Vi setter $u = \ln x$ og kvadrerer begge sider i likningen. Dette gir

$$u = \sqrt{2u+4} \quad \Rightarrow \quad u^2 = 2u + 4$$

Likningen $u^2 - 2u - 4 = 0$ gir at $u = 1 \pm \sqrt{5}$. Innsetting viser at $u = 1 + \sqrt{5}$ er løsning, mens $u = 1 - \sqrt{5}$ er falsk. Dette gir

$$\ln x = 1 + \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x = e^{1+\sqrt{5}}$$

Dette er en positiv løsning. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 8.

Vi har at $x = -3$ er eneste vertikale asymptote, så $a = -3$. Den skrå asymptoten finner vi ved polynomdivisjonen

$$(x^2 - 3x - 1) : (x+3) = x - 6 + \frac{17}{x+3}$$

Dermed er $b = -6$ og $a - b = 3$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 9.

Stigningstallet til tangenten i $x = 0$ er lik $f'(0)$, og vi har at

$$f'(x) = 2x\ln(1-x) + x^2 \frac{1}{1-x} \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 10.

Funksjonen har derivert gitt ved

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - x - 3 - x^2 + 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

Vi faktoriserer $f'(x)$. Det gir

$$f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

Vi setter opp fortegnsdiagram for f', og ser at $x = 1$ er eneste lokale minimum. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 11.

Funksjonen har derivert fra forrige oppgave og annenderivert gitt ved

$$f''(x) = \frac{(2x+2)((x+1)^2) - (x^2+2x-3)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + 6}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

Vi har derfor at $f''(x) > 0$ for $x > -1$, $f''(x) < 0$ for $x < -1$, og $x = -1$ er eneste mulige vendepunkt for f. Men f er ikke definert for $x = -1$, og derfor er $x = -1$ ikke et vendepunkt for f. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 12.

Elastisiteten $\mathrm{El}_p\, D(p) = -1$ når

$$\mathrm{El}_p\, D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = \frac{-5p}{110 - 5p} = -1$$

det vil si når $-5p = -(110 - 5p)$, eller $p = 110/10 = 11$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 13.

Den deriverte funksjonen er

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}$$

Siden nevneren ikke har nullpunkter og er lik 7 for $x = 0$, er den alltid positiv. Telleren er positiv for $x > 5/2$, og negativ for $x < 5/2$. Derfor er f avtagende $[2,\, 5/2]$ og voksende på $[5/2,\, 3]$. Funksjonen har ikke en invers funksjon, siden det finnes funksjonsverdier y slik at $y = f(x_1) = f(x_2)$ med $x_1 \neq x_2$ i [2,3], for eksempel $f(2) = f(3) = 0$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 14.

Siden $1 - x \ln x \to \infty$ og $e^x \to \infty$ når $x \to \infty$, så er grenseverdien et ubestemt uttrykk av typen «∞/∞». Vi kan dermed bruke L'Hopitals regel, som gir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1 \cdot \ln x - x \cdot 1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln x - 1}{e^x}$$

Dette er igjen et ubestemt uttrykk av typen «∞/∞», og vi bruker L'Hopitals regel en gang til, som gir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\ln x - 1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x}{e^x} = 0$$

Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 15.

Vi har at $f'(x) = 8 - 4x - 4x^3 = -4(x^3 + x - 2)$. Stasjonære punkter er derfor gitt ved likningen $x^3 + x - 2 = 0$. Mulige heltallsløsninger er $x = \pm 1, \pm 2$ og ser at $x = 1$ er en løsning. Polynomdivisjon gir derfor faktoriseringen

$$f'(x) = -4(x - 1)(x^2 + x + 2)$$

og $x^2 + x + 2 = 0$ har ingen løsninger. Dermed er $x = 1$ eneste stasjonære punkt for f. Siden $f''(x) = -4 - 12x^2$, så er $f''(x) \leq 0$ for alle x, og det betyr at f er konkav. Derfor er $x = 1$ et globalt maksimum. Det kan ikke være noen globale minimum, siden $x = 1$ er eneste kandidatpunkt. Riktig svar er alternativ **B**.