Løsning	MET 11802 Matematikk for siviløkonomer
Dato	12. mai 2017 kl 0900 - 1200

Riktige svar: CABCD-ABDCD-DBABC

Oppgave 1.

Den effektive renten er gitt ved

$$r_{\text{eff}} = (1 + 0{,}064/12)^{12} - 1 \cong 0{,}06591 = 6{,}591\%$$

Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 2.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den endelige geometriske rekken

$$\frac{250.000}{1{,}10^2} + \cdots + \frac{250.000}{1{,}10^{11}} = \frac{250.000}{1{,}10^2} \cdot \frac{1 - (1/1{,}10)^{10}}{1 - 1/1{,}10} = \frac{250.000(1{,}10^{10} - 1)}{0{,}10 \cdot 1{,}10^{11}}$$

Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 1.396.493 kr. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 3.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige rekken

$$\frac{250.000}{1{,}10^3} + \frac{300.000}{1{,}10^4} + \frac{300.000}{1{,}10^5} + \cdots = \frac{250.000}{1{,}10^3} + \frac{300.000}{1{,}10^4} \cdot \frac{1}{1 - 1/1{,}10} = \frac{250.000 + 300.000/0{,}10}{1{,}10^3}$$

Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 2.441.773 kr. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 4.

Vi har at grensekostnaden $C'(x)$ er gitt ved $C'(x) = 205 \cdot 3x^2 - 120 \cdot 2x + 2000 = 615x^2 - 240x + 2000$. Enhetskostnaden er gitt ved

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 205x^2 - 120x + 2000 + \frac{2800}{x}$$

Hvis den er minimal, så er enhetskostnaden lik grensekostnaden. Det gir $A(x) = C'(x)$, eller

$$205x^2 - 120x + 2000 + \frac{2800}{x} = 615x^2 - 240x + 2000 \quad \Rightarrow \quad 410x^2 - 120x = \frac{2800}{x}$$

Multiplikasjon med x gir likningen

$$410x^3 - 120x^2 = 2800 \quad \Rightarrow \quad 410x^3 - 120x^2 - 2800 = 0$$

Vi prøver med heltallene $x = \pm 1, \pm 2, \ldots$ som går opp i 2800, og ser at $x = 2$ er en løsning. Det er ingen andre løsninger, siden $410x^3 - 120x^2 - 2800 = (x-2)(410x^2 + 700x - 1400)$, og den kvadratiske faktoren ikke har nullpunkter. Ved å sette opp en fortegnslinje for

$$A'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{C'(x) - A(x)}{x}$$

ser vi at enhetskostnaden er minimal for $x = 2$. Enhetskostnaden er da $A(2) = 3.980$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{5+x}{x^2-1}-1=\frac{-x^2+x+6}{x^2-1}=\frac{-(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\geq 0$$

og setter opp fortegnsskjema for VS. Vi ser at løsningsmengden er $[-2,-1)\cup(1{,}3]$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 6.

Likningen kan, etter muliplikasjon med fellesnevner, skrives som

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}\quad\Rightarrow\quad x^2-1=2x$$

Løsningene er $x=1\pm\sqrt{2}$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 7.

Vi setter $u=\ln x$ og kvadrerer begge sider i likningen. Dette gir

$$u=\sqrt{2u}+4\quad\Rightarrow\quad(u-4)^2=2u$$

Likningen $u^2-10u+16=0$ gir at $u=5\pm3$. Innsetting viser at $u=8$ er løsning, mens $u=2$ er falsk. Dette gir

$$\ln x=8\quad\Rightarrow\quad x=e^8$$

Dette er en positiv løsning. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 8.

Vi har at $x=2$ er eneste vertikale asymptote, så $a=2$. Den skrå asymptoten finner vi ved polynomdivisjonen

$$(x^2+5x+1):(x-2)=x+7+\frac{15}{x-2}$$

Dermed er $b=7$ og $a-b=-5$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 9.

Stigningstallet til tangenten i $x=1$ er lik $f'(1)$, og vi har at

$$f'(x)=1\cdot\ln(x^2-2x+3)+x\cdot\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot(2x-2)\quad\Rightarrow\quad f'(1)=\ln(2)>0$$

Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 10.

Funksjonen har derivert gitt ved

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+2)-(x^2-x-2)\cdot1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+3x-2-x^2+x+2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

Vi faktoriserer $f'(x)$. Det gir

$$f'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Vi setter opp fortegnsdiagram for f', og ser at $x=0$ er lokalt minimum og $x=-4$ er lokalt maksimum. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 11.

Funksjonen har derivert fra forrige oppgave og annenderivert gitt ved

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

Vi har derfor at $f''(x) > 0$ for $x > -2$, $f''(x) < 0$ for $x < -2$, og $x = -2$ er eneste mulige vendepunkt for f. Men f er ikke definert for $x = -2$, og derfor er $x = -2$ ikke et vendepunkt for f. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 12.

Elastisiteten $\epsilon = \mathrm{El}_p\, D(p)$ er

$$\epsilon = \mathrm{El}_p\, D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = \frac{-8p}{120-8p}$$

Ulikheten $\epsilon > -1$ kan skrives

$$\frac{-8p}{120-8p} > -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8p}{120-8p} + 1 = \frac{120-16p}{120-8p} = \frac{16(7{,}5-p)}{8(15-p)} > 0$$

og løsningen er $p < 7{,}5$ siden elastisiteten er definert for $p < 15$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 13.

Den deriverte funksjonen er

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} \cdot (2x+4) = \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$$

Siden nevneren ikke har nullpunkter og er lik 5 for $x = 0$, er den alltid positiv. Telleren er positiv for $x > -2$, og f er derfor voksende på $D_f = [-1, 1]$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 14.

Siden $x \to 0$ og $\ln x \to -\infty$ når $x \to 0^+$, skriver vi om grenseverdien og bruker L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 15.

Vi har at $f'(x) = 4x^3 + 6x - 10$. Stasjonære punkter er derfor gitt ved likningen $4x^3 + 6x - 10 = 0$. Vi ser at $x = 1$ er en løsning, og polynomdivisjon gir faktoriseringen

$$f'(x) = (x-1)(4x^2+4x+10)$$

og $4x^2 + 4x + 10 = 0$ har ingen løsninger. Dermed er $x = 1$ eneste stasjonære punkt for f. Siden $f''(x) = 12x^2 + 6$, så er $f''(x) > 0$ for alle x, og det betyr at f er konveks. Derfor er $x = 1$ et globalt minimum. Det kan ikke være noen globale minimum, siden $x = 1$ er eneste kandidatpunkt. Riktig svar er alternativ **C**.