SENSORVEILEDNING - Flervalg

MET 11802
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	21.05.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	21.05.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Midtveiseksamen i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

21. mai 2019

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rett svar	B	D	A	C	A	A	B	D	C	C	C	D	B	B	D

Oppgave 1

Nåverdien (i millioner) er $\dfrac{40}{1{,}12^7} = 18{,}09$ (B).

Oppgave 2

(A) Ved produktregelen er $f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$

(B) Ved brøkregelen er $f'(x) = \dfrac{(\ln(x))' \cdot x^2 - \ln(x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

(C) Ved kjerneregelen og potensregelen er $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(D) Ved brøkregelen er
$$f'(x) = \frac{(x-1)' \cdot (x+2) - (x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

så (D) er gal.

Oppgave 3

Vi har $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ og fordi e^x er større enn 0 for alle x er også $f(x)$ det og (A) er korrekt.

Oppgave 4

Den årlige vekstfaktoren er $1 + r$ hvor r er den årlige renten. Vi får likningen $40 \cdot (1+r)^6 = 70$ som har løsningen $r = (\frac{7}{4})^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 9{,}78\%$ (C).

Oppgave 5

Vi bruker polynomdivisjon og får $f(x) = 4 + \frac{2}{x-10}$ som har vertikal asymptote linjen $x = 10$ og horisontal asymptote linjen $y = 4$ og det passer bare med (A).

Oppgave 6

Vi deler på 144 på begge sider av likning (A) og får den på standardformen $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. Sentrum i ellipsen er $(x, y) = (1, 2)$ som passer med (A) og (C). Horisontal halvakse er $5 - 1 = 4$ og vertikal halvakse er $5 - 2 = 3$ og det passer blant (A) og (C) bare med (A).

Oppgave 7

Vi setter $u = \sqrt{x}$ og får annengradslikningen $u^2 - 9u + 22 = 0$ som har løsningene $u = -2$ og $u = 11$. Men fordi $\sqrt{x}$ ikke kan være negativ får vi bare løsningen $x = 121$ (B).

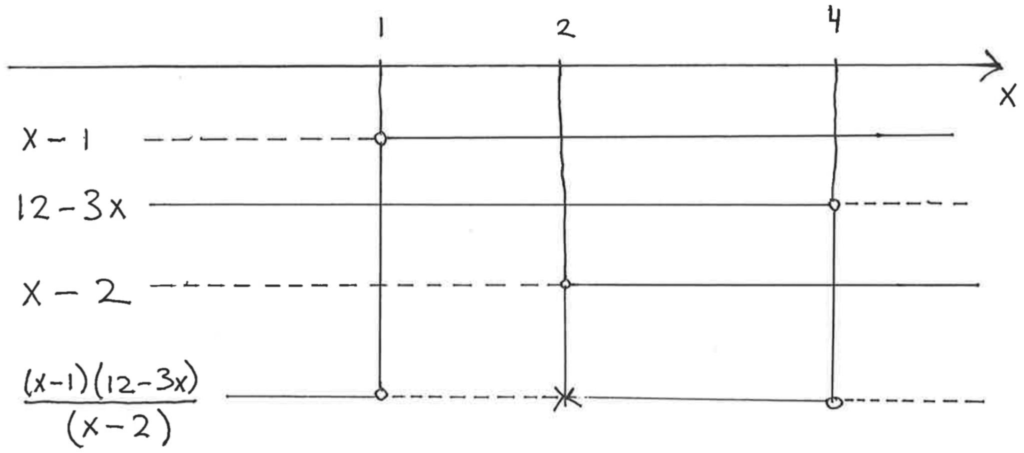
[1] Eksamenskoder MET11802 og MET11805

Oppgave 8

Her kan vi tenke vekstfaktor. Hvis renten er 10% vil 1 krone vokse til $1{,}1^{15}$ på 15 år, men hvis det er halvårlig forrentning vil den på 15 år vokse til noe litt større, nemlig $1{,}05^{30}$, så (A) er gal. Tilsvarende vil 1 krone med 12% rente vokse til $1{,}12^{100\,000}$ på 100 000 år med årlig forrentning, men til litt mer hvis det er forrentning hver 4. måned, nemlig $1{,}04^{300\,000}$ så (B) er også gal. Med kontinuerlig forrentning får vi $e^{12\,000}$ som jo må gi noe mer enn årlig forrentning ($1{,}12^{100\,000}$) så (C) er gal, og litt mer enn forrentning hver 4. måned så (D) er rett.

Oppgave 9

Siden vi har 0 på høyre side og teller og nevner i brøken er ferdig faktorisert kan vi bruke fortegnsskjema direkte:



Figur 1: Fortegnsskjema

og dermed ser vi at (C) er riktig.

Oppgave 10

Vi deriverer to ganger og får

(A) $K(0) = 1200 > 0$, $K'(x) = 0{,}01 \geqslant 0$, $K''(x) = 0 \geqslant 0$ så ok.

(B) $K(0) = 800e^{-0{,}3} > 0$, $K'(x) = 80e^{0{,}1(x-3)} \geqslant 0$, $K''(x) = 8e^{0{,}1(x-3)} \geqslant 0$ så ok.

(C) $K(0) = 1000 \cdot \ln(50) > 0$, $K'(x) = \frac{2000x}{x^2+50} \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} K''(x) &= \frac{(2000x)' \cdot (x^2+50) - 2000x \cdot (x^2+50)'}{(x^2+50)^2} = \frac{2000 \cdot (x^2+50) - 2000x \cdot 2x}{(x^2+50)^2} \\ &= \frac{2000x^2 + 100\,000 - 4000x^2}{(x^2+50)^2} = \frac{-2000(x^2-50)}{(x^2+50)^2} \end{aligned}$$

som er negativ for $x > \sqrt{50}$. $K(x)$ er altså ikke en kostnadsfunksjon.

(D) $K(0) = 900 > 0$, $K'(x) = 0{,}01x + 0{,}1 \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}01 \geqslant 0$ så ok.

Svaret er derfor (C).

Oppgave 11

Elastisiteten er gitt som $\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{-2p}{100-2p}$. Etterspørselen er elastisk med hensyn på prisen når $\varepsilon(p) < -1$, dvs $\frac{-2p}{100-2p} < -1$, dvs $\frac{100-4p}{100-2p} < 0$ som med fortegnskjema gir $25 < p < 50$ (C).

Oppgave 12

(A) Linjen $x = 0$ er en (ensidig) vertikal asymptote for $\ln(x)$.
(B) Vi har $x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x+1)$ så linjene $x = -5$ og $x = -1$ er vertikale asymptoter for $\frac{1}{x^2+6x+5}$.
(C) Linjen $x = -2{,}5$ er en vertikal asymptote for $\frac{x-3}{2x+5}$
(D) Fordi $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geqslant 1$ for alle x har ikke $\frac{e^x}{x^2-6x+10}$ noen vertikal asymptote.
Svaret er derfor (D).

Oppgave 13

(A) Fordi $f''(x) \geqslant 0$ for x mellom 5 og 8 er $f(x)$ er konveks i dette intervallet.
(B) Vi ser at stigningstallet til tangenten til grafen til $f''(x)$ er negativt for x mellom 7 og 10, dvs $(f'(x))'' = f'''(x) \leqslant 0$ i dette intervallet og $f'(x)$ er derfor konkav her.
(C) Fordi $(f'(x))' = f''(x) \leqslant 0$ for x mellom 2 og 5 er $f'(x)$ avtagende her og dermed $f'(2) > f'(5)$.
(D) $f(x)$ kan, men må ikke, være avtagende for x mellom 2 og 3. Man kan ha et førstegradsledd ax i $f(x)$ med a veldig stor slik at $f(x)$ er voksende mellom 2 og 3 uten at dette merkes på den annenderiverte til $f(x)$ fordi $(ax)'' = 0$.
Svaret er altså (B).

Oppgave 14

Vi finner nullpunktene:
(A) $x = r$, $x = r + 4$ og $x = r - 3$ så her er r den midterste roten og de to andre ligger der de skal.
(B) $x = t$, $x = t - 3$ og $x = t - 7$ så her er t den største roten, men den midterste ligger 3 nedenfor, ikke 4 nedenfor slik den skal.
(C) $x = k$, $x = k + 3$ og $x = k + 7$ så her er k den minste roten og de to andre ligger der de skal.
(D) $x = s - 1$, $x = s + 2$ og $x = s + 6$ så her er s en større enn den minste roten og de to andre ligger der de skal.
Svaret er altså (B).

Oppgave 15

Hvis funksjonen er strengt voksende eller strengt avtagende i hele sitt definisjonsområde har den en omvendt funksjon, ellers ikke. Vi finner derfor

$$f'(x) = \frac{(5x-3)' \cdot (x-1) - (5x-3) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{5 \cdot (x-1) - (5x-3) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

som vi ser er negativ for alle $x > 1$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for $x > 1$ og har en omvendt funksjon $g(x)$. Definisjonsmengden til $g(x)$ er lik verdimengden til $f(x)$ og for å finne den bruker vi polynomdivisjon og får $f(x) = 5 + \frac{2}{x-1}$. Dette er standardformen til en hyperbelfunksjon med

$$\lim_{x \to 1^+} 5 + \frac{2}{x-1} = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to \infty} 5 + \frac{2}{x-1} = 5^+ \quad \text{(dvs } f(x) \text{ nærmer seg 5 ovenfra)}$$

og ved skjæringssetningen får vi alle mellomliggende verdier. Dette betyr at $D_g = V_f = \langle 5, \infty \rangle$, dvs (D).