Eksamen	MET 11803 Matematikk
Dato	15. desember 2015 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

En eiendom antas å ha verdien $V(t) = 120\,e^{\sqrt{t}/5}$ etter t år. Vi bruker kontinuerlig forrentning med diskonteringsrente $r = 4\%$ når vi beregner nåverdi av salgssummen.

(a) Vi ønsker å selge eiendommen når nåverdien av salgssummen er maksimal. Når er det optimalt å selge eiendommen?
(b) Det tar T år før eiendommens verdi har økt til det dobbelte. Finn T, og vis at det tar $3T$ år til før verdien har doblet seg på nytt.

Oppgave 2.

Regn ut de ubestemte integralene:

$$(a) \int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (b) \int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \qquad (c) \int \frac{x^3+x^2-2x-6}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Regionen R er avgrenset av de rette linjene $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ og kurven $y = \ln x$.

(d) Lag en skisse av regionen R, og beregn dens areal.

Oppgave 3.

Vi betrakter matrisen A og det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

der a er en parameter og x,y,z er variable.

(a) Regn ut $|A|$.
(b) Finn A^{-1} når $a = 0$.
(c) Når har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uendelig mange løsninger? Løs det lineære systemet i disse tilfellene.
(d) Anta at a er slik at $|A| \neq 0$. Løs det lineære systemet ved hjelp av Cramers regel.

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$$

(a) Regn ut f'_x og f'_y, og finn eventuelle stasjonære punkter for f.
(b) Er (0,0) et sadelpunkt? Begrunn svaret.
(c) Finn alle lokale maksima og minima for f.
(d) La $D = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$. Finn maksimums- og minimumsverdien til f på D.

Oppgave 5.

Vi betrakter nivåkurven $g(x,y) = 0$, hvor g er funksjonen

$$g(x,y) = x^3 + xy + y^2$$

(a) Finn alle punkt på nivåkurven med $x = -2$, og bestem tangenten i hvert av disse punktene.
(b) Finn maksimumsverdien til $f(x,y) = x$ under bibetingelsen $x^3 + xy + y^2 = 0$.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$