Løsning	MET 11803 Matematikk
Dato	03. juni 2016 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi løser det lineære systemet for $s = 8$ ved Gauss-eliminasjon:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, at $y - z = -3$ gir $y = z - 3$, og at $x + y - 2z = -5$ gir $x = -y + 2z - 5 = -(z-3) + 2z - 5 = z - 2$. Det er altså én frihetsgrad for $s = 8$, og løsningene kan skrives

$$\begin{cases} x = z - 2 \\ y = z - 3 \\ z \text{ er en fri variabel} \end{cases}$$

(b) Vi utvikler $|A|$ langs første kolonne:

$$\begin{aligned} |A| &= (2-s)((2-s)^2 - 9) - 3(3(2-s) - 9) + 3(9 - 3(2-s)) \\ &= (2-s)(s^2 - 4s - 5) + 54 - 18(2-s) = (2-s)(s-5)(s+1) + 18(s+1) \\ &= (s+1) \cdot [(2-s)(s-5) + 18] = (s+1)(-s^2 + 7s + 8) \\ &= -(s+1)^2(s-8) = -s^3 + 6s^2 + 15s + 8 \end{aligned}$$

(c) For $s = 0$ er $|A| = 8$ fra forrige deloppgave, og kofaktormatrisen er gitt ved

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Siden kofaktormatrisen er symmetrisk, er den adjungerte matrisen lik kofaktormatrisen, og den inverse matrisen blir

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

For $s = 0$ er løsningen av det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, som gir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) Vi ser fra faktoriseringen i b) at $|A| = 0$ for $s = -1$ og $s = 8$. Når $s \neq 8, -1$ er derfor $|A| \neq 0$, og systemet har i disse tilfellene en entydig løsning som vi kan finne ved Cramers regel. Vi regner ut $|A_1(\mathbf{b})|$:

$$|A_1(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4+s & 2-s & 3 \\ 1-2s & 3 & 2-s \end{vmatrix} = 0$$

Dermed gir Cramers regel at

$$x = \frac{0}{|A|} = 0$$

Løsningen (x,y,z) har altså $x = 0$ for alle $s \neq 8, -1$.

Oppgave 2.

Vi har at $f'(x) = -2xe^x - (x^2+3)e^x = -(x^2 + 2x + 3)e^x$. Dermed er den annenderiverte gitt ved

$$f''(x) = -(2x+2)e^x - (x^2 + 2x + 3)e^x = -(x^2 + 4x + 5)e^x$$

Siden $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$, har vi at $f''(x) < 0$ for alle x. Dermed er f konkav, men ikke konveks.

Oppgave 3.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke delbrøksoppspaltning. Siden nevneren er $x^2+x = x(x+1)$, gir det at

$$\frac{3x-4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 3x-4 = A(x+1) + Bx$$

Når vi setter inn $x = 0$ i siste likning, får vi $A = -4$, og setter vi inn $x = -1$, får vi $-B = -7$, eller $B = 7$. Vi ser at $A = -4$ og $B = 7$ gir at $3x - 4 = A(x+1) + Bx$. Dermed er

$$\int \frac{3x-4}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{7}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -4\ln|x| + 7\ln|x+1| + \mathcal{C}$$

(b) Vi løser $\int 18x^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ ved delvis integrasjon, og velger $u' = 18x^2$ og $v = \ln(x+1)$, som gir $u = 6x^3$ og $v' = 1/(x+1)$. Dermed får vi

$$\int 18x^2\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = 6x^3\ln(x+1) - \int 6x^3 \cdot \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 6x^3\ln(x+1) - \int \frac{6x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Ved polynomdivisjon har vi at

$$\frac{6x^3}{x+1} = 6x^2 - 6x + 6 + \frac{-6}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{6x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(6x^2 - 6x + 6 + \frac{-6}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int 18x^2\ln(x+1)\,\mathrm{d}x &= 6x^3\ln(x+1) - \left(2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)\right) + \mathcal{C} \\ &= 6x^3\ln(x+1) - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 6\ln(x+1) + \mathcal{C}\end{aligned}$$

(c) Vi løser $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = \sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = 1/(2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^u \cdot (2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = \int e^u \cdot 2u\,\mathrm{d}u = \int 2u\,e^u\,\mathrm{d}u$$

Vi bruker til slutt delvis integrasjon for å løse det siste integralet. Det gir

$$\int 2ue^u\,\mathrm{d}u = 2ue^u - \int 2\cdot e^u\,\mathrm{d}u = 2ue^u - 2e^u + \mathcal{C} = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}$$

Vi har brukt at $u = \sqrt{x}$ for å skrive svaret ved hjelp av x.

(d) For å finne det bestemte integralet $\int_1^b \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ bruker vi delbrøksoppspaltning. Siden nevneren er $x^2 + x = x(x+1)$, gir det at

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(x+1) + Bx$$

Når vi setter inn $x = 0$ i siste likning, får vi $A = 1$, og setter vi inn $x = -1$, får vi $-B = 1$, eller $B = -1$. Vi ser at $A = 1$ og $B = -1$ gir at $1 = A(x+1) + Bx$. Dermed er

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + \mathcal{C} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \mathcal{C}$$

Det bestemte integralet blir dermed

$$\int_1^b \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^b = \ln\left(\frac{b}{b+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2$$

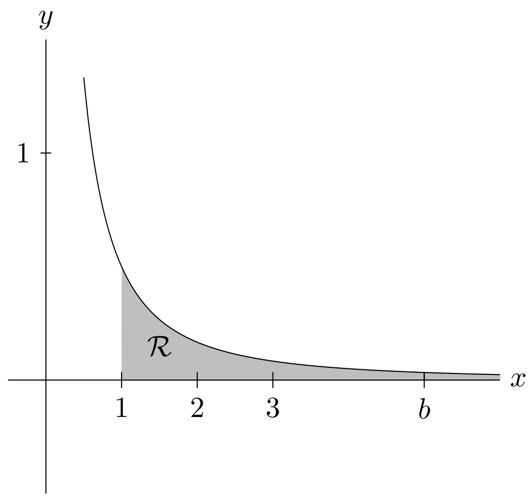
og grenseverdien blir

$$\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left(\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2\right) = \ln(1) + \ln(2) = \ln(2) \approx 0{,}693$$

Vi kan tolke dette som arealet av området R gitt ved

$$R = \{(x,y) : 1 \le x,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

der $f(x) = 1/(x^2+x)$. Vi integrerer jo over $1 \le x \le b$ og lar $b \to \infty$, så grensene i x-retning er kun $x \ge 1$. Siden uttrykket som integreres er lik $f(x) > 0$, er grensene i y-retning $0 \le y \le f(x)$. Området R er derfor begrenset av $x = 1$, $y = 0$ og grafen til f, og er skissert nedenfor.



OPPGAVE 4.

(a) Vi skriver $f = \sqrt{u}$ med $u = 36 - x^2 - 4y^2$. De partiellderiverte til f er gitt ved

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{u}}, \quad f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y) = \frac{-4y}{\sqrt{u}}$$

Stasjonære punkter er gitt ved $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir $x = y = 0$. Vi ser at f og de partiellderiverte er definert i $(x,y) = (0,0)$ siden $u(0,0) = 36 > 0$. Punktet $(x,y) = (0,0)$ er derfor det eneste stasjonære punktet til f.

(b) Vi regner ut de andre ordens partiellderiverte til f for å bestemme Hesse-matrisen til f, og får

$$f''_{xx} = \left(\frac{-x}{\sqrt{u}}\right)'_x = \frac{-1 \cdot \sqrt{u} - (-x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{u}}}{u} = \frac{-u - x^2}{u\sqrt{u}} = \frac{4y^2 - 36}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{-x}{\sqrt{u}}\right)'_y = \frac{0 \cdot \sqrt{u} - (-x) \cdot \frac{-4y}{\sqrt{u}}}{u} = \frac{-4xy}{u\sqrt{u}}$$

$$f''_{yy} = \left(\frac{-4y}{\sqrt{u}}\right)'_y = \frac{-4 \cdot \sqrt{u} - (-4y) \cdot \frac{-8y}{2\sqrt{u}}}{u} = \frac{-4u - 16y^2}{u\sqrt{u}} = \frac{4x^2 - 144}{u\sqrt{u}}$$

Dermed er Hesse-matrisen $H(f)$ generelt gitt ved

$$H(f) = \frac{1}{u\sqrt{u}} \cdot \begin{pmatrix} 4y^2 - 36 & -4xy \\ -4xy & 4x^2 - 144 \end{pmatrix}$$

I det stasjonære punktet $(x,y) = (0,0)$ er Hesse-matrisen $H(f)(0,0)$ gitt ved

$$H(f)(0,0) = \frac{1}{36\sqrt{36}} \cdot \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Siden $\det H(f)(0,0) = 2/18 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(0,0) = -5/6 < 0$ er $(0,0)$ et lokalt maksimumspunkt ved annenderivert-testen.

(c) Siden $u(4,2) = 36 - 16 - 16 = 4$, har vi at $f(4,2) = 2$, $f'_x(4,2) = -2$ og $f'_y(4,2) = -4$. Dermed er den lineære approksimasjonen

$$L(x,y) = 2 - 2(x-4) - 4(y-2) = 18 - 2x - 4y$$

(d) Siden $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \leq \sqrt{36} = 6$, så er $f(0,0) = 6$ den globale maksimumsverdien til f. Punktet $(0,0)$ er det stasjonære punktet til f. Siden $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \geq 0$, så er $f(x,y) = 0$ den globale minimumsverdien for f, som oppnås i alle punkt (x,y) slik at $36 - x^2 - 4y^2 = 0$. Minimumpunktene er altså punktene med $x^2 + 4y^2 = 36$, og det er uendelig mange slike punkter med samme verdi $f = 0$. Minimumspunktene er randpunktene til f siden $D_f = \{(x,y) : 36 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$. De er også kritiske punkter for f siden de partiellderiverte ikke eksisterer når $u = 36 - x^2 - 4y^2 = 0$.

OPPGAVE 5.

(a) Skriver vi nivåkurven som $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 36$, er den deriverte gitt ved

$$y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

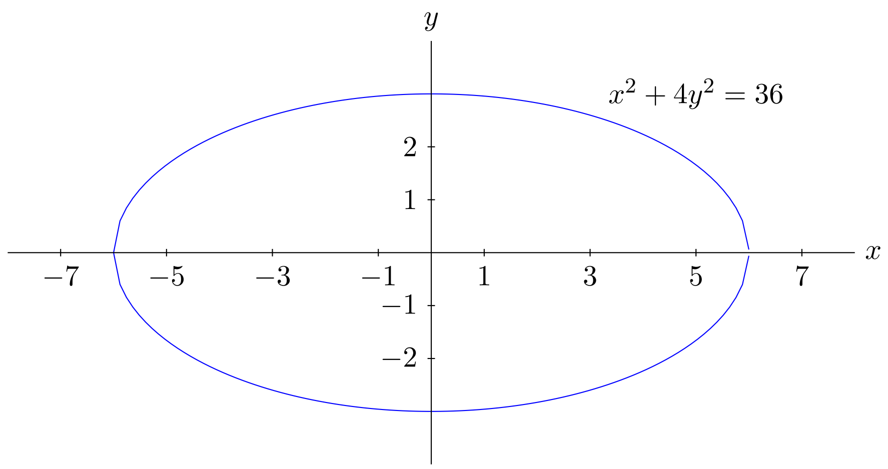
Derfor vil $y' = 1/2$ gi $x/y = -4/2 = -2$, eller $x = -2y$. Setter vi dette inn likningen, får vi $(-2y)^2 + 4y^2 = 8y^2 = 36$, eller $y^2 = 36/8 = 18/4$. Dette gir $y = \pm\sqrt{18}/2 = \pm 3\sqrt{2}/2$ og $x = -2y$. Vi finner de to punktene

$$(x,y) = (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2) \quad \text{og} \quad (x,y) = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2)$$

(b) Mengden D av tillatte punkter er nivåkurven $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 36$. Siden likningen kan skrives

$$\frac{x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

er dette en ellipse med sentrum i $(0,0)$ og halvakser $a = \sqrt{36} = 6$ og $b = \sqrt{9} = 3$. Derfor er mengden D begrenset, med $-6 \le x \le 6$ og $-3 \le y \le 3$. Kurven er vist nedenfor.



(c) Siden $\sqrt{36 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{0} = 0$ slik at $f(x,y) = x + 2y$ i alle tillatte punkt med $x^2 + 4y^2 = 36$, kan vi skrive Lagrange-problemet som

$$\max / \min f(x,y) = x + 2y \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 36$$

Dette gir Lagrange-funksjonen $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + 2y - \lambda(x^2 + 4y^2)$. *Lagrange-betingelsene* er førsteordensbetingelsene

$$\mathcal{L}'_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2 - \lambda \cdot 8y = 0$$

samt bibetingelsen $x^2 + 4y^2 = 36$. Vi finner kandidatpunkter ved å løse Lagrange-betingelsene: Fra førsteordensbetingelsene får vi

$$\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{2}{8y}$$

(vi ser at $x = 0$ eller $y = 0$ ikke kan være løsning, så divisjon med x og y er uproblematisk). Dette gir $4x = 8y$, eller $x = 2y$. Setter vi dette inn i bibetingelsen, får vi

$$(2y)^2 + 4y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad 8y^2 = 36$$

Dette gir $y^2 = 36/8 = 18/4$, og $y = \pm\sqrt{18}/2 = \pm 3\sqrt{2}/2$, og dermed $x = 2y = \pm 3\sqrt{2}$. Vi får de to kandidatpunktene

$$(x,y) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2), \; (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2)$$

med henholdsvis $\lambda = \pm\sqrt{2}/12$ og $f = \pm 6\sqrt{2}$. Dermed er det første punktet kandidat for maksimum, og det andre kandidat for minimum. Siden mengden D er begrenset, og dermed kompakt, har problemet et maksimum og et minimum. Andre kandidatene for maks/min kan kun være tillatte punkter der bibetingelsen er degenerert, og vi sjekker om det er noen slike:

$$g_x = g_y = 0 \quad \text{gir} \quad 2x = 8y = 0$$

Det eneste punktet som gir degenerert bibetingelse er (0,0), og det er ikke et tillatt punkt. Derfor er $f(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2) = 6\sqrt{2}$ maksimum, og $f(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2) = -6\sqrt{2}$ minimum.

(d) Endrer vi bibetingelsen til $g(x,y) = x^2+4y^2 \leq 36$, er det to typer kandidatpunkter: Kandidater på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 36$ (som vi har funnet ovenfor) og kandidater i det indre $g(x,y) = x^2 + 4y^2 < 36$. Et indre punkt som er maks/min må være et stasjonært punkt, og vi finner slike punkter ved å regne ut de partiell-deriverte til $f(x,y) = x + 2y - \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$. Merk at vi ikke kan anta at det siste leddet er null nå, og at vi kan bruke regningen fra forrige oppgave:

$$f'_x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{u}}, \quad f'_y = 2 - \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y) = 2 + \frac{4y}{\sqrt{u}}$$

Dermed gir $f'_x = f'_y = 0$ etter multiplikasjon med $\sqrt{u}$ at

$$\sqrt{u} + x = 0, \quad 2\sqrt{u} + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u} = -x = -2y$$

Dermed er $u = (-x)^2 = x^2$, som kan skrives som $36 - x^2 - 4y^2 = x^2$, og $x = 2y$. Tilsammen gir dette

$$2x^2 + 4y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad 12y^2 = 36$$

Dette gir $y^2 = 3$ og $y = \pm\sqrt{3}$. Vi må sette prøve på svaret siden vi har kvadrert likningen, og ser at det er kun et stasjonært punkt

$$(x,y) = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

med $f(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} - \sqrt{36-24} = -4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$. Dette er minimum siden $-6\sqrt{3} < -6\sqrt{2}$. I det nye optimeringsproblemet er derfor $f(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2) = 6\sqrt{2}$ maksimum, og $f(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ minimum.