Eksamen	MET 11803 Matematikk
Dato	03. juni 2016 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra. **Alle svar skal begrunnes.**

Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen A og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2-s & 3 & 3 \\ 3 & 2-s & 3 \\ 3 & 3 & 2-s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ s+4 \\ 1-2s \end{pmatrix}$$

Vi betrakter s som en parameter og x,y,z som variable.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $s = 8$. Hvor mange frihetsgrader har systemet?
(b) **(6p)** Regn ut $|A|$ for en vilkårlig verdi av s.
(c) **(6p)** Finn A^{-1} når $s = 0$, og bruk A^{-1} til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
(d) **(6p)** For hvilke verdier av s har det lineære systemet eksakt én løsning? Finn x i disse tilfellene.

Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = 4 - (x^2 + 3)e^x$.

(6p) Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$. Er f konveks? Er f konkav?

Oppgave 3.

Regn ut de ubestemte integralene:

(a) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\displaystyle\int 18x^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Regn ut grenseverdien. Forklar at den kan tolkes som arealet av et område R, og tegn en skisse av R:

(d) **(6p)** $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$$

(a) **(6p)** Regn ut f'_x og f'_y, og finn eventuelle stasjonære punkter for f.
(b) **(6p)** Klassifisér de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
(c) **(6p)** Finn den lineære approksimasjonen til f i punktet $(x,y) = (4,2)$.
(d) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f.

Oppgave 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = x + 2y - \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 36$$

(a) **(6p)** Finn punktene på nivåkurven $x^2 + 4y^2 = 36$ der tangenten har stigningstall $y' = 1/2$.
(b) **(6p)** Tegn en skisse av $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 36\}$. Er D begrenset? Hva slags kurve er dette?
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet og finn maksimums- og minimumsverdien.

Vi endrer bibetingelsen i optimeringsproblemet til $x^2 + 4y^2 \leq 36$.

(d) **Bonus (6p)** Løs det nye optimeringsproblemet.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$