Løsning	MET 11803 Matematikk
Dato	12. desember 2016 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi løser det lineære systemet for $t = 1$ ved Gauss-eliminasjon:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, at $y - z = -4$ gir $y = z - 4$, og at $x - 2y + z = 3$ gir $x = 2y - z + 3 = 2(z - 4) - z + 3 = z - 5$. Det er altså én frihetsgrad for $t = 1$, og løsningene kan skrives

$$\begin{cases} x = z - 5 \\ y = z - 4 \\ z \text{ er en fri variabel} \end{cases}$$

(b) Vi utvikler $|A|$ langs første kolonne:

$$|A| = -2(4 - t) - 1(-2t - 1) + t(t^2 + 2) = t(t^2 + 2) + 4t - 7 = t^3 + 6t - 7$$

(c) For $t = 0$ er $|A| = -7$ fra forrige deloppgave, og kofaktormatrisen er gitt ved

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Den adjungerte matrisen er lik den transponerte av kofaktormatrisen, og den inverse matrisen blir dermed

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

For $t = 0$ er løsningen av det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, som gir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 \\ -12/7 \\ 29/7 \end{pmatrix}$$

(d) Vi faktoriserer uttrykket i b) for å finne ut når $|A| = 0$. Mulige heltallsløsninger av $t^3 + 6t - 7 = 0$ er $\pm 1, \pm 7$, og vi ser at $t = 1$ er en løsning. Dermed gir polynomdivisjon at

$$\det(A) = t^3 + 6t - 7 = (t - 1)(t^2 + t + 7)$$

Likningen $t^2 + t + 7 = 0$ har ingen løsninger, så $t = 1$ er eneste verdi av t slik at $\det(A) = 0$. Når $t \neq 1$ er derfor $|A| \neq 0$, og systemet har én entydig løsning som vi kan finne ved Cramers regel. Vi regner ut $|A_1(\mathbf{b})|$:

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{b})| &= \begin{vmatrix} t + 5 & t & 1 \\ 3 & -2 & t \\ t - 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (t + 5)(4 - t) - 3(-2t - 1) + (t - 10)(t^2 + 2) \\ &= t^3 - 11t^2 + 7t + 3 = (t - 1)(t^2 - 10t - 3) \end{aligned}$$

Dermed gir Cramers regel at

$$x = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} = \frac{t^3 - 11t^2 + 7t + 3}{t^3 + 6t - 7} = \frac{t^2 - 10t - 3}{t^2 + t + 7}$$

Løsningen (x,y,z) har altså x gitt ved uttrykket ovenfor for $t \neq 1$. Det siste uttrykket får vi ved å forkorte faktoren $t - 1$ i teller og nevner.

Oppgave 2.

Vi har at $f'(x) = 1/u \cdot u' = (2x+2)/(x^2+2x+1) = 2/(x+1)$ siden $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Dermed er den annenderiverte gitt ved

$$f''(x) = 2\left((x+1)^{-1}\right)' = -2(x+1)^{-2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Dermed er $f''(x) < 0$ for alle $x \neq -1$ og f er konkav, men ikke konveks. Alternativt kan man forenkle funksjonen før man deriverer, og skrive

$$f(x) = \ln(x^2+2x+1) = \ln(x+1)^2 = 2\ln(x+1)$$

Dette gir selvsagt også $f'(x) = 2/(x+1)$ og $f''(x) = -2/(x+1)^2$, og derivasjonene er enklere å gjøre på denne måten.

Oppgave 3.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke delbrøksoppspaltning. Siden nevneren er $x^2+x = x(x+1)$, gir det at

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad 2x+1 = A(x+1) + Bx$$

Når vi setter inn $x = 0$ i siste likning, får vi $A = 1$, og setter vi inn $x = -1$, får vi $-B = -1$, eller $B = 1$. Vi ser at $A = 1$ og $B = 1$ gir at $2x+1 = A(x+1) + Bx$. Dermed er

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \ln|x+1| + C$$

(b) Vi løser $\int 12x^2\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ ved delvis integrasjon, og velger $u' = 12x^2$ og $v = \ln(1-x)$, som gir $u = 4x^3$ og $v' = -1/(1-x)$. Dermed får vi

$$\int 12x^2\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 4x^3\ln(1-x) + \int 4x^3 \cdot \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = 4x^3\ln(1-x) + \int \frac{4x^3}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Ved polynomdivisjon har vi at

$$\frac{4x^3}{-x+1} = -4x^2 - 4x - 4 + \frac{4}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{4x^3}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-4x^2 - 4x - 4 + \frac{4}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

Dermed er

$$\int 12x^2\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 4x^3\ln(1-x) - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 4x - 4\ln(1-x) + C$$

(c) Vi løser $\int 1/(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = 1+\sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = 1/(2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\cdot(2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 2\int 1 - \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = 2u - 2\ln u + C$$

siden $\sqrt{x} = u - 1$. Dette gir

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

Vi har brukt at $u = 1+\sqrt{x}$ for å skrive svaret ved hjelp av x.

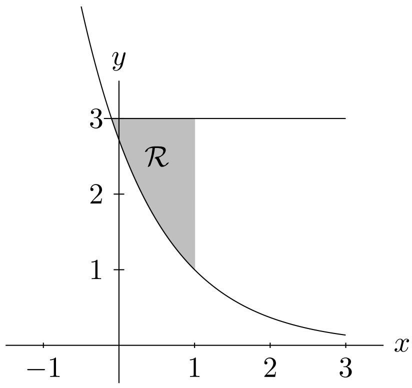
(d) Vi ser at $y = 3$ skjærer grafen til $y = e^{1-x}$ når $e^{1-x} = 3$, det vil si når $1 - x = \ln 3$, eller $x = 1 - \ln 3 < 1$. For $1 - \ln 3 \leq x \leq 1$, så er $e^{1-x} < 3$. Derfor er arealet $A(R)$ gitt ved

$$A(R) = \int_{1-\ln 3}^{1} \left(3 - e^{1-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Dette gir

$$A(R) = \left[3x + e^{1-x}\right]_{1-\ln 3}^{1} = 3 + e^0 - 3(1-\ln 3) - e^{\ln 3} = 3\ln 3 - 2 \simeq 1{,}296$$

Området R begrenset av $x = 1$, $y = 3$ og grafen til f er skissert nedenfor.



OPPGAVE 4.

(a) Funksjonen $f = 23 - 4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y$ har partiellderiverte gitt ved

$$f'_x = -8x - 8, \quad f'_y = -18y + 18$$

Stasjonære punkter er gitt ved $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir $x = -1$ og $y = 1$. Punktet $(x,y) = (-1,1)$ er derfor det eneste stasjonære punktet til f.

(b) Vi regner ut de andre ordens partiellderiverte til f for å bestemme Hesse-matrisen til f, og får

$$f''_{xx} = -8, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = -18$$

Dermed er Hesse-matrisen $H(f)$ den konstante matrisen

$$H(f) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Siden $\det H(f)(-1,1) = 144 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(-1,1) = -26 < 0$, er $(-1,1)$ et lokalt maksimumspunkt ved annenderivert-testen.

(c) Vi har at $f(1,0) = 23 - 12 = 11$, at $f'_x(1,0) = -16$ og at $f'_y(1,0) = 18$. Dermed er den lineære approksimasjonen

$$L(x,y) = 11 - 16(x-1) + 18(y-0) = 27 - 16x + 18y$$

(d) Det eneste kandidatpunktet for maksimum/minimum er $(-1,1)$, som er et lokalt maksimum med $f(-1,1) = 36$. Siden vi har

$$f(x,y) = 23 - 4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y = 36 - 4(x+1)^2 - 9(y-1)^2 \leq 36$$

er $f(-1,1) = 36$ maksimumsverdien for f. Siden det ikke er noen andre kandidatpunkter, har f ikke noen minimumsverdi. Det kan vi også se ved å sette inn $x = 0$ i $f(x,y)$, som gir

$$f(0,y) = 23 - 9y^2 + 18y = -9(y-1)^2 + 32$$

og dermed går $f(0,y) \to -\infty$ når $y \to \infty$.

OPPGAVE 5.

(a) Skriver vi nivåkurven som $g(x,y) = xy = 4$, er den deriverte gitt ved

$$y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{y}{x}$$

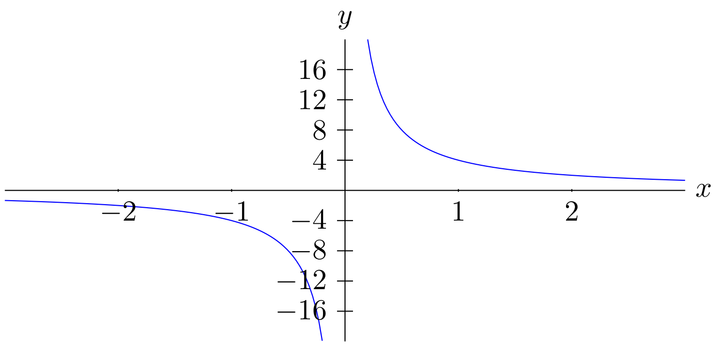
Derfor vil $y' = -2$ gi $-y/x = -2$, eller $y = 2x$. Setter vi dette inn likningen, får vi $x(2x) = 4$, eller $x^2 = 2$. Dette gir $x = \pm\sqrt{2}$ og $y = 2x = \pm 2\sqrt{2}$. Vi finner de to punktene

$$(x,y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \quad \text{og} \quad (x,y) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

(b) Mengden D av tillatte punkter er nivåkurven $g(x,y) = xy = 4$. Siden likningen kan skrives

$$xy = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4/x = 4 \cdot 1/x$$

er dette en hyperbel, som er gitt ved at hyperbelen $y = 1/x$ er strukket med en faktor 4 i y-retning. Mengden D er ikke begrenset. Vi kan velge en x-verdi som er vilkårlig stor, så lenge $y = 4/x$. For eksempel gir $x = 1000$ at $y = 4/1000$, og tilsvarende kan gjøres for vilkårlige store x-verdier. Kurven er vist nedenfor.



(c) Vi har Lagrange-funksjonen $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 36 - 4x^2 - 9y^2 - \lambda(xy)$. *Lagrange-betingelsene* er førsteordensbetingelsene

$$\mathcal{L}'_x = -8x - \lambda \cdot y = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = -18y - \lambda \cdot x = 0$$

samt bibetingelsen $xy = 4$. Vi finner kandidatpunkter ved å løse Lagrange-betingelsene: Fra førsteordensbetingelsene får vi at

$$x = -\lambda y/8, \quad y = -\lambda x/18 = \lambda^2 y/144$$

ved å sette inn x fra første likning i andre likning, siden $8 \cdot 18 = 144$. Siden $xy = 4$, kan ikke $y = 0$, og dette gir $\lambda^2 = 144$, eller $\lambda = \pm 12$. For $\lambda = 12$ får vi

$$x = -3y/2 \quad \Rightarrow \quad xy = (-3y/2)y = 4$$

Dette er ikke mulig, siden det gir $y^2 = -8/3$. For $\lambda = -12$ får vi

$$x = 3y/2 \quad \Rightarrow \quad xy = (3y/2)y = 4$$

Dette gir $y^2 = 8/3$, og dermed $y = \pm\sqrt{8/3} = \pm\sqrt{4}\sqrt{2}/\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/\sqrt{3} = \pm 2/3 \cdot \sqrt{6}$ og dermed at $x = 3y/2 = \pm\sqrt{6}$. Altså har vi kandidatpunktene

$$(x,y) = (\sqrt{6}, 2\sqrt{6}/3), \quad (x,y) = (-\sqrt{6}, -2\sqrt{6}/3)$$

begge med $\lambda = -12$. Disse to punktene er kandidater for maksimum og minimum i Lagrange-problemet. Det eneste punktet som gir degenerert bibetingelse, med $g'_x = y = 0$ og $g'_y = x = 0$, er $(0,0)$, og det er ikke et tillatt punkt. Derfor er det ikke noen flere kandidatpunkter.

(d) I begge punktene er $x^2 = 6$ og $y^2 = 8/3$, slik at $f = 36 - 4 \cdot 6 - 9 \cdot 8/3 = -12$. Dermed er enten begge punktene maksimumspunkt, eller begge er minimumspunkt. For å undersøke dette nærmere, løser vi $xy = 4$ for y, som gir $y = 4/x$, og setter dette inn i funksjonen som skal optimeres. Dette gir

$$u(x) = f(x,4/x) = 36 - 4x^2 - 9(4/x)^2 = 36 - 4x^2 - 144/x^2$$

for $x \neq 0$, siden $y = 4/x$ er definert for alle $x \neq 0$. Vi finner at

$$u'(x) = -8x + 288/x^3$$

Dermed er $u' = 0$ når $8x = 288/x^3$, eller $x^4 = 288/8 = 36$. Dette gir $x^2 = 6$, eller $x = \pm\sqrt{6}$ som stasjonære punkter (dette er punktene som vi fant ved hjelp av Lagrange's metode tidligere). Faktoriserer vi u' og setter opp fortegnsdiagram, finner vi at

$$u'(x) = \frac{-8x^4 + 288}{x^3} = \frac{-8(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x^2 + 6)}{x^3}$$

og at u er voksende i $(-\infty, -\sqrt{6}]$ og i $(0,\sqrt{6}]$, og avtagende i $[-\sqrt{6},0)$ og i $[\sqrt{6},\infty)$. Siden $u(\sqrt{6}) = u(-\sqrt{6}) = -12$ has samme verdi, er dette maksimumspunkter. Dette er de to kandidatpunktene vi fant i c). Når $x \to \pm\infty$ og når $x \to 0$, ser vi at

$$u(x) = 36 - 4x^2 - 144/x^2 \to -\infty$$

Derfor har problemet ikke noe minimum.