Løsning	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	30. mai 2017 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi løser det lineære systemet for $a = 1$ ved Gauss-eliminasjon. Vi finner først den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Deretter finner vi en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har én løsning, og vi finner den ved baklengs substitusjon. Siste likning er $2z = -3$, som gir $z = -3/2$. Andre likning er $2y+2z = 2y+2(-3/2) = 2$, som gir $2y = 2+3 = 5$ og $y = 5/2$. Første likning er $2x+2y = 2x+2(5/2) = 4$, som gir $2x = 4-5 = -1$ og $x = -1/2$. Dermed er løsningen $(x,y,z) = (-1/2,\ 5/2,\ -3/2)$.

(b) Når $a = 1$, så er matrisen A og kofaktormatrisen C gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har at $\det(A) = 2(4-4) - 2(4-0) = -8$, og dermed er den inverse matrisen gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legg merke til at når A er symmetrisk, blir også C symmetrisk, så $C^T = C$ i dette tilfellet. Løsningen av det lineære systemet ved bruk av den inverse matrisen er gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Vi ser at dette stemmer overens med svaret vi fikk i (a).

(c) Vi vet at systemet har eksakt én løsning hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. Vi regner derfor ut $|A|$, og velger å utvikle $|A|$ langs andre rad:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{vmatrix} \\ &= -2(2(1+a) - 2(1-a)) + (1+a)((1+a)^2 - (1-a)^2) - 2(2(1+a) - 2(1-a)) \\ &= -2(4a) + (1+a)(4a) - 2(4a) = 4a(1+a-4) = 4a(a-3) \end{aligned}$$

Dermed er $|A| = 0$ for $a = 0$ og $a = 3$, og $|A| \neq 0$ for alle andre verdier av a. Altså har systemet eksakt én løsning for $a \neq 0, 3$.

(d) De eneste verdiene av a der systemet kan være inkonsistent (det vil si at det ikke har noen løsninger), er $a = 0$ og $a = 3$. Vi undersøker løsningene for disse verdiene ved hjelp av Gauss-eliminasjon. For $a = 0$ får vi uendelig mange løsninger, siden det er én fri variabel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

For $a = 3$ får vi ingen løsninger:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Dermed har vi ingen løsninger kun for $a = 3$.

Oppgave 2.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke substitusjonen $u = 2 - x$. Dette gir $\mathrm{d}u = -1 \cdot \mathrm{d}x$, og dermed

$$\int \frac{3}{(2-x)^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{-1} = \int -3u^{-4}\,\mathrm{d}u = u^{-3} + \mathcal{C} = \frac{1}{u^3} + \mathcal{C} = \frac{1}{(2-x)^3} + \mathcal{C}$$

Det bestemte integralet blir derfor

$$\int_0^1 \frac{3}{(2-x)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{(2-x)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(b) Vi løser integralet ved substitusjonen $u = e^x$. Dette gir $\mathrm{d}u = e^x \cdot \mathrm{d}x = u \cdot \mathrm{d}x$, og dermed

$$\int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{u + 1/u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$

For å løse det nye integralet, gjør vi en ny substitusjon $v = u^2 + 1$. Dette gir $\mathrm{d}v = 2u \cdot \mathrm{d}u$, og dermed

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2u}{v}\frac{\mathrm{d}v}{2u} = \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \ln(v) + \mathcal{C} = \ln(u^2+1) + \mathcal{C}$$

Dermed er

$$\int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \ln(u^2+1) + \mathcal{C} = \ln(e^{2x}+1) + \mathcal{C}$$

(c) Vi løser integralet ved delvis integrasjon, og velger $u' = 1/x^2$ og $v = \ln x$. Dette gir $u = -1/x$ og $v' = 1/x$, og dermed

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \mathcal{C}$$

Oppgave 3.

(a) Vi regner ut den deriverte, og får at

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $\ln x = 1/2$, det vil si at $x = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Siden f er voksende ($f'(x) < 0$) for $x < \sqrt{e}$ og f er avtagende ($f'(x) < 0$) for $x > \sqrt{e}$, er $x = \sqrt{e}$ et globalt maksimumspunkt for f, med maksimumsverdi

$$f_{\text{maks}} = f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{e} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$$

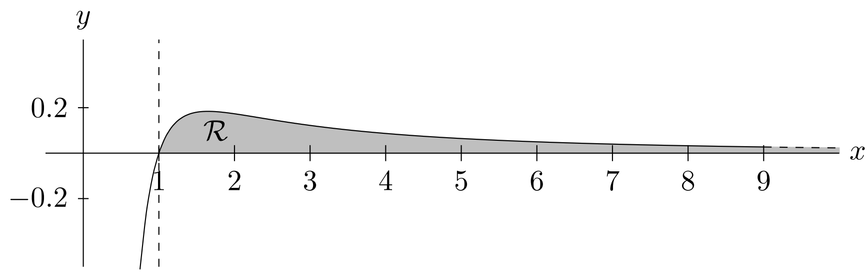
Funksjonen har ikke noe globalt minimumspunkt, siden $x = \sqrt{e}$ er det eneste stasjonære punkt (og det er heller ikke andre kritiske punkt eller randpunkt). Derfor har f ingen minimumsverdi.

(b) Vi vet at funksjonen vokser i intervallet $(0, \sqrt{e}]$, har et maksimum i $x = \sqrt{e}$, og avtar i intervallet $[\sqrt{e}, \infty)$. I $x = 1$ er verdien $f(1) = \ln 1/1^2 = 0$. Når $x \to \infty$, vil $f(x) \to 0$. En skisse av grafen til f og området R er vist nedenfor. Arealet til området R er gitt ved

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Vi bruker det ubestemte integralet vi fant i Oppgave 2 (c) ovenfor, og får at

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\ln 1}{1} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}$$



Dermed blir arealet av området R

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}\right) = 1$$

I utregningen ovenfor har vi brukt L'Hospitals regel, som gir at

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Oppgave 4.

(a) For å finne de partiellderiverte til f, kan vi enten bruke brøkregelen for derivasjon, eller først forenkle funksjonsuttrykket til f for å forenkle regningen. Vi velger det siste, som gir

$$f(x,y) = \frac{2x+3y-6}{xy} = \frac{2x}{xy} + \frac{3y}{xy} + \frac{-6}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{3}{x} - \frac{6}{xy}$$

De første ordens deriverte blir da

$$f'_x = -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^2y} = \frac{6-3y}{x^2y}, \quad f'_y = -\frac{2}{y^2} + \frac{6}{xy^2} = \frac{6-2x}{xy^2}$$

Førsteordensbetingelsene er $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir $6-3y=0$ og $6-2x=0$, eller $y=2$ og $x=3$. I punktet $(x,y)=(3,2)$ er f og de første ordens partiellderiverte definert. Derfor er $(x,y)=(3,2)$ det eneste stasjonære punktet til f.

(b) Vi regner ut de andre ordens partiellderiverte til f for å bestemme Hesse-matrisen til f, og tar utgangspunkt i uttrykkene

$$f'_x = -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^2y}, \quad f'_y = -\frac{2}{y^2} + \frac{6}{xy^2}$$

som gir enklest regning. Dette gir

$$f''_{xx} = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^3y} = \frac{6y-12}{x^3y}, \quad f''_{xy} = -\frac{6}{x^2y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{4}{y^3} - \frac{12}{xy^3} = \frac{4x-12}{xy^3}$$

Dermed er Hesse-matrisen $H(f)(3,2)$ i det stasjonære punktet gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{6y-12}{x^3y} & -\frac{6}{x^2y^2} \\ -\frac{6}{x^2y^2} & \frac{4x-12}{xy^3} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad H(f)(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Siden $\det H(f)(3,2) = 0 - 1/36 = -1/36 < 0$, er det stasjonære punktet $(x,y)=(3,2)$ et sadelpunkt ved annenderivert-testen.

(c) Siden funksjonen f ikke har randpunkter eller andre kritiske punkter (hvor funksjonen er definert, men ikke de partiellderiverte), er det stasjonære punktet $(x,y)=(3,2)$ eneste kandidat til et maksimums- eller minimumspunkt for f. Dette punktet er et sadelpunkt, og derfor ikke et maksimums- eller minimumspunkt. Derfor har f ikke noe maksimum eller minimum.

(d) Nivåkurven $f(x,y)=5$ har likning

$$f(x,y) = \frac{2x+3y-6}{xy} = 5 \quad\Rightarrow\quad 2x+3y-6 = 5xy$$

Vi finner skjæringspunkt med linjen $y=1$ ved å sette inn $y=1$ i likningen, som gir

$$2x+3-6 = 5x \quad\Rightarrow\quad 3x = -3 \quad\Rightarrow\quad x = -1$$

Derfor er $(x,y) = (-1,1)$ eneste skjæringspunkt. Tangenten til nivåkurven i dette punktet har likning $y - y_0 = a(x - x_0)$, der $(x_0,y_0) = (-1,1)$ og stigningstallet a er gitt ved

$$a = -\frac{f'_x(-1,1)}{f'_y(-1,1)} = -\frac{3}{-8} = \frac{3}{8}$$

I denne utregningen har vi brukt uttrykkene for f'_x og f'_y fra (a). Dette gir tangentlikningen

$$y - 1 = \frac{3}{8}(x+1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{8}x + \frac{11}{8}$$

Oppgave 5.

(a) Vi gjenkjenner likningen $x^2 + y^2 = 25$ som likningen til en sirkel med sentrum i $(x,y) = (0,0)$ og radius $r = \sqrt{25} = 5$. Sirkelen er begrenset, fordi alle punkter (x,y) på sirkelen tilfredsstiller $-5 \leq x,y \leq 5$.

(b) Lagrange-problemet har Lagrange-funksjon

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^4 + 2x^2y^2 - 4y^3 - \lambda(x^2 + y^2)$$

Lagrange-betingelsene er de to førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 4x^3 + 4xy^2 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 4x^2y - 12y^2 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Fra førsteordensbetingelsene får vi ved faktorisering at

$$\begin{aligned} 2x(2x^2 + 2y^2 - \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } 2x^2 + 2y^2 = \lambda \\ 2y(2x^2 - 6y^2 - \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } 2x^2 - 6y = \lambda \end{aligned}$$

Hvis $x = 0$, så er $y = \pm 5$ ved bibetingelsen, og $2x^2 - 6y = \lambda$ gir $\lambda = -6y = \mp 30$. Dette gir kandidatpunktene

$$(x,y;\lambda) = (0,5;-30),\ (0,-5;30)$$

Hvis $x \neq 0$ og $y = 0$, så er $x = \pm 5$ ved bibetingelsen, og $2x^2 + 2y^2 = \lambda$ gir $\lambda = 2x^2 = 50$. Dette gir kandidatpunktene

$$(x,y;\lambda) = (5,0;50),\ (-5,0;50)$$

Hvis $x \neq 0$ og $y \neq 0$, så er $2x^2 + 2y^2 = \lambda$ og $2x^2 - 6y = \lambda$. Subtraksjon av likningene gir $2y^2 - (-6y) = 2y(y+3) = 0$, og dette gir $y = -3$ siden vi har antatt at $y \neq 0$. Bibetingelsen gir da at $x = \pm\sqrt{25 - 9} = \pm 4$, og innsetting i likningene over gir at $\lambda = 2x^2 + 2y^2 = 32 + 18 = 50$. Dette gir kandidatpunktene

$$(x,y;\lambda) = (4,-3;50),\ (-4,-3;50)$$

Ettersom dette er alle tilfellene, er det altså totalt seks kandidatpunkt som oppfyller Lagrange-betingelsene.

(c) Siden mengden D av tillatte punkter er begrenset, har problemet maksimum og minimum ved ekstremverdisetningen. De ordinære kandidatpunktene, som vi har regnet ut ovenfor, har funksjonsverdier

$$f(0,5) = -500,\ f(0,-5) = 500,\ f(\pm 5,0) = 625,\ f(\pm 4,-3) = 652$$

Maksimums- og minimumsverdien må finnes blant disse kandidatpunktene, siden det ikke er noen tillatte punkter med degenerert bibetingelse. Det ville jo gitt $g'_x = 2x = 0$ og $g'_y = 2y = 0$, som gir $(x,y) = (0,0)$, og dette punktet er ikke tillatt siden det ikke passer i bibetingelsen. Vi har derfor at maksimumsverdien er $f_{\text{maks}} = f(\pm 4,-3) = 652$ og at minimumsverdien er $f_{\min} = f(0,-5) = -500$.

(d) Endringen i problemet er at verdien til a i bibetingelsen $g(x,y) = a$ har endret seg fra $a = 25$ til $a = 26$, det vil si at $\Delta a = 26 - 25 = 1$. Siden $\lambda = 50$ i maksimumspunktet, er et estimat for ny maksimumsverdi gitt ved

$$f_{\text{maks}} + \lambda \cdot \Delta a = 652 + 50 \cdot 1 = 702$$

Siden $\lambda = 50$ i minimumspunktet, er et estimat for ny minimumsverdi gitt ved

$$f_{\text{min}} + \lambda \cdot \Delta a = -500 + (-30) \cdot 1 = -530$$

Dette følger fra tolkningen til Lagrangemultiplikatoren λ. Man kan regne ut eksakte maksimums- og minimumsverdier (ikke en del av oppgaven), og det ville gitt

$$f_{\text{maks}} = f(\pm\sqrt{17}, -3) = 703 \quad \text{og} \quad f_{\text{min}} = f(0,\sqrt{26}) = -104\sqrt{26} \cong -530{,}298$$

når $a = 26$. Vi ser at estimatene gir gode tilnærmelsesverdier.