EKSAMENSOPPGAVE - Skriftlig eksamen

# MET 11803
# Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

| | | |
|---|---|---|
| **Utlevering:** | 18.12.2017 | Kl. 14.00 |
| **Innlevering:** | 18.12.2017 | Kl. 19.00 |

| | |
|---|---|
| Vekt: | 70% av MET 1180 |
| Antall sider i oppgaven: | 4 inkl. forsiden |
| Innføringsark: | Ruter |
| Tillatte hjelpemidler: | BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator. |
| Kontinuasjonstype | Ordinær |

| | |
|---|---|
| Eksamen | MET 11803 Matematikk for siviløkonomer |
| Dato | 18. desember 2017 kl 1400 - 1900 |

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra.

**Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på om presentasjonen av framgangsmåte og resultat er klar og presis når besvarelsen evalueres.**

## Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen $A$ og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & a \\ a & 3 & 2 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ a \end{pmatrix}$$

Vi betrakter $a$ som en parameter og $x,y,z$ som variable.

(a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 1$.
(b) **(6p)** Finn $A^{-1}$ når $a = 1$, og bruk $A^{-1}$ til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
(c) **(6p)** Bestem $a$ slik at det lineære systemet har eksakt én løsning.
(d) **(6p)** Anta at $a$ er slik at det lineære systemet har eksakt én løsning $(x,y,z)$. Finn et uttrykk $y = y(a)$ for $y$-koordinaten til løsningen ved å bruke Cramers regel.

## Oppgave 2.

Regn ut integralene:

$$\text{(a) } \textbf{(6p)} \int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b) } \textbf{(6p)} \int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c) } \textbf{(6p)} \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

## Oppgave 3.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ definert for $x > 0$.

(a) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for $f$, hvis de eksisterer.
(b) **(6p)** Tegn en grov skisse av området $R$ i første kvadrant avgrenset av grafen til $f$ og $x$-aksen på intervallet $[1,\infty)$. Er arealet til området $R$ endelig?

## Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$$

(a) **(6p)** Regn ut de første ordens partiellderiverte og Hessematrisen til $f$.
(b) **(6p)** Vis at nivåkurven $f(x,y) = 2$ skjærer linjen $y = x$ i to punkter $(a,a)$ og $(b,b)$.
(c) **(6p)** Finn tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i punktene $(a,a)$ og $(b,b)$.
(d) **(6p)** Finn eventuelle stasjonære punkter for $f$, og klassifisér disse som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.

OPPGAVE 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 4$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2 + 4y^2 = 4$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet.

Vi endrer bibetingelsen i Lagrange-problemet til $x^2 + 4y^2 = 5$.

(d) **Bonus (6p)** Gi en tolkning av Lagrangemultiplikatoren i et Lagrange-problem, og bruk denne tolkningen til å estimere minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet.

# Formelsamling

## 1 Finansmatematikk

**Geometriske rekker.** En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

**Nåverdier.** Nåverdien $K_0$ til en innbetaling $K_n$ er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

## 2 Integrasjon

**Integrasjonsmetoder.**

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

**Areal.** Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

## 3 Lineær algebra

**Cramers regel.** Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \ \ldots \ x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne $i$ fra matrisen $A$ med $\mathbf{b}$.

## 4 Funksjoner i flere variable

**Annenderivert-testen.** Et stasjonært punkt $(x^*, y^*)$ for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

**Nivåkurver.** På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Totalderivasjon.** Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$