

# MET 11803

## Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

<b>Utlevering:</b>	20.12.2018	Kl. 09:00
<b>Innlevering:</b>	20.12.2018	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

### Oppgave 1.

- (a) Vi løser det lineære systemet for  $a = 1$  ved Gauss-eliminasjon. Vi finner først den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Deretter finner vi en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array} \right)$$

Vi ser at systemet har en entydig løsning, og vi finner løsningen ved baklengs substitusjon. Siste likning gir  $-5z = 5$ , eller  $z = -1$ , andre likning gir  $y + 2(-1) = -2$ , eller  $y = 0$ , og første likning gir  $x + 0 + (-1) = 1$ , eller  $x = 2$ . Dermed er løsningen  $(x, y, z) = (2, 0, -1)$ .

- (b) Vi regner ut determinanten til  $A$ , og velger å utvikle  $|A|$  langs tredje kolonne:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{vmatrix} = a(3 - 2a) - 3(3a - a) = 3a - 2a^2 - 6a = -2a^2 - 3a = -a(2a + 3)$$

Dermed er  $|A| = 0$  hvis  $a = 0$  eller  $a = -3/2$ .

- (c) Vi vet fra teori at det lineære systemet har én løsning hvis  $|A| \neq 0$ , og ingen eller uendelig mange løsninger hvis  $|A| = 0$ . I dette tilfellet er  $|A| = 0$  for  $a = 0$  eller  $a = -3/2$  fra (b). For  $a = 0$  undersøker vi antall løsninger ved å bruke Gauss-eliminasjon:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Det viser at det er en fri variabel, og uendelig mange løsninger når  $a = 0$ . For  $a = -3/2$  bruker vi tilsvarende framgangsmåte:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -3/2 & 1 & -3/2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ -3/2 & 3 & 0 & 9/2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ -3/2 & 1 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3 & 0 & 9/2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 6 & 9/2 & 27/4 \end{array} \right)$$

Det lineære systemet har ingen løsninger når  $a = -3/2$  siden neste steg gir

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 6 & 9/2 & 27/4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 15/8 \end{array} \right)$$

Dermed har det lineære systemet uendelig mange løsninger kun for  $a = 0$ .

- (d) Når  $a = 1$ , er matrisen  $A$  gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir at

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

## Oppgave 2.

- (a) Vi løser dette integralet ved å bruke at  $1/x^2 = x^{-2}$ :

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -1x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

- (b) Vi løser integralet ved delvis integrasjon, der vi tenker på  $1/x^2 = x^{-2}$  som en faktor. Vi velger  $u' = 1/x^2$  og  $v = 1 - \ln x$ , som gir  $u = -1/x$  fra forrige oppgave, og  $v' = -1/x$ . Delvis integrasjon gir dermed

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx &= \int x^{-2} \cdot (1 - \ln x) dx = \int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot (1 - \ln x) - \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C = \frac{\ln x}{x} + C \end{aligned}$$

- (c) Vi løser integralet ved substitusjonen  $u = 1 - \sqrt{x}$ , som gir  $du = dx/(-2\sqrt{x})$ , og dermed

$$\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \cdot (-2\sqrt{x}) du = \int -2e^u du = -2e^u + C = -2e^{1-\sqrt{x}} + C$$

## Oppgave 3.

- (a) Vi regner ut den deriverte til funksjonen

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^u}{\sqrt{x}}$$

ved å først bruke brøkregelen, og så kjerneregelen med kjerne  $u = 1 - \sqrt{x}$  og  $u' = -1/(2\sqrt{x})$ . Dette gir at

$$f'(x) = \frac{(e^u \cdot u') \cdot \sqrt{x} - e^u \cdot 1/(2\sqrt{x})}{x} = \frac{e^u \cdot (-\sqrt{x}) - e^u \cdot 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{1-\sqrt{x}}(-\sqrt{x} - 1)}{2x\sqrt{x}}$$

Vi har forenklet brøkkutttrykket ved å multiplisere med  $2\sqrt{x}$  i teller og nevner.

- (b) Vi tar utgangspunkt i det faktoriserte uttrykket for  $f'(x)$  som vi fant i (a). Vi ser at når  $x > 0$ , så er nevner positiv, faktoren  $e^u$  er positiv, og  $-\sqrt{x} - 1$  er negativ. Derfor er  $f'(x) < 0$  for  $x > 0$ , og det betyr at  **$f$  er avtagende i hele definisjonsområdet**. Vi kunne alternativt lage et fortegnsskjema for  $f'(x)$  for å se at  $f'(x) < 0$  for  $x > 0$ .
- (c) Når  $x \rightarrow 0^+$  har vi at telleren  $e^{1-\sqrt{x}} \rightarrow e^1 = e$  og nevneren  $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$ . Dermed har vi at

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \infty$$

Når  $x \rightarrow \infty$  har vi at telleren  $e^{1-\sqrt{x}} = e/e^{\sqrt{x}} \rightarrow 0$  og nevneren  $\sqrt{x} \rightarrow \infty$ . Dermed har vi at

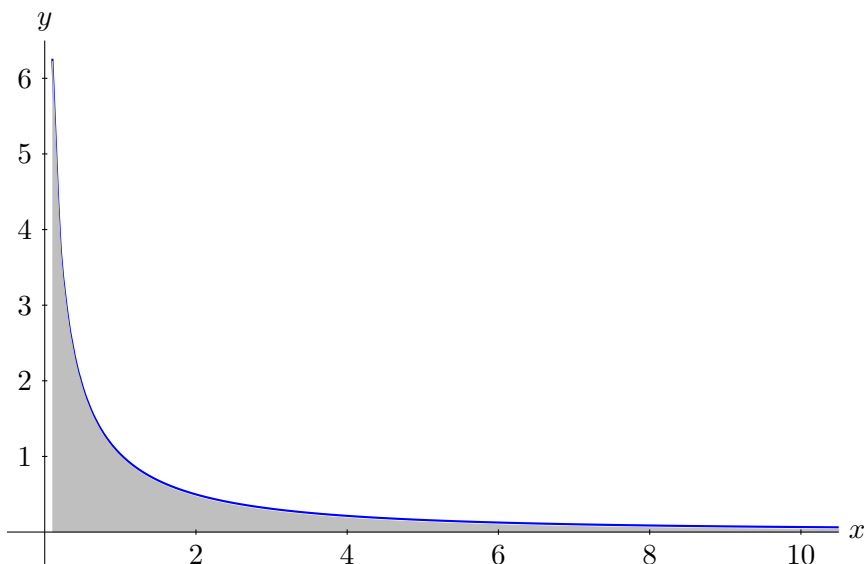
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 0$$

- (d) En grov skisse med grafen til  $f$ , med området  $R$  mellom grafen til  $f$  og  $x$ -aksen markert, er vist nedenfor. Arealet av det markerte området er gitt ved

$$A(R) = \int_0^\infty f(x) dx = \left[ -2e^{1-\sqrt{x}} + C \right]_0^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -2e^{1-\sqrt{x}} \right]_0^b$$

Her har vi brukt det ubestemte integralet vi fant i Oppgave 2 (c). Dette gir

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow \infty} -2e^{1-\sqrt{b}} + 2e^{1-0} = 2e$$



#### Oppgave 4.

- (a) Vi finner de partiellderiverte til  $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$  og løser så førsteordensbetingelsene for å finne de stasjonære punktene til  $f$ :

$$f'_x = 2x + 2xy^2 = 2x(1 + y^2) = 0$$

$$f'_y = 2y + 2yx^2 = 2y(1 + x^2) = 0$$

Siden  $1 + y^2 \geq 1$  og  $1 + x^2 \geq 1$  for alle  $x, y$ , gir dette at  $2x = 2y = 0$ , og de stasjonære punktene er  $(x,y) = (0,0)$ .

- (b) Vi finner Hesse-matrisen ved å regne ut de andreordens partiellderiverte til  $f$ , og får at

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2 + 2x^2 \end{pmatrix}$$

Vi bruker andrederivert-testen for å klassifisere det stasjonære punktet  $(0,0)$ , og regner ut

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Siden determinanten til denne matrisen er  $AC - B^2 = 4 > 0$  og koeffisientene  $A = 2$  og  $C = 2$  på diagonalen er positive, er  $(0,0)$  et **lokalt minimum** for  $f$ .

- (c) Vi fant i (a) og (b) at  $f$  kun har ett stasjonært punkt  $(0,0)$ , som er et lokalt minimumspunkt. Dermed har  $f$  **ikke noe globalt maksimum**, og  $(0,0)$  er eneste kandidat til globalt minimum. Siden  $f(0,0) = 1$  og  $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \geq 1$  for alle  $(x,y)$ , er  $(0,0)$  et **globalt minimum** for  $f$  med minimumsverdi  $f_{\min} = f(0,0) = 1$ .
- (d) Vi bruker Lagranges metode for å finne kandidater for maksimum, og ser derfor på Lagrange-funksjonen

$$\mathcal{L}(x,y; \lambda) = x^2 + y^2 + x^2y^2 - \lambda(x^2 + 2y^2)$$

Vi skriver ned Lagrange-betingelsene FOC+C (førsteordensbetingelser og bibetingelse):

$$\mathcal{L}'_x = 2x + 2xy^2 - \lambda \cdot 2x = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = 2y + 2yx^2 - \lambda \cdot 4y = 0$$

$$x^2 + 2y^2 = 5$$

Vi skriver de to første likningene som

$$2x(1 + y^2 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } 1 + y^2 = \lambda$$

$$2y(1 + x^2 - 2\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } 1 + x^2 = 2\lambda$$

Vi ser dermed at det er fire muligheter:

- (a) Hvis  $x = y = 0$ , så gir det en motsigelse i bibetingelsen  $x^2 + 2y^2 = 5$ . Ingen kandidatpunkter i dette tilfellet.

- (b) Hvis  $x = 0$  og  $1 + x^2 = 2\lambda$ , så er  $\lambda = 1/2$  og bibetingelsen gir  $2y^2 = 5$ , eller  $y = \pm\sqrt{5/2}$ . Disse kandidatpunktene har  $f = 5/2$ .
- (c) Hvis  $y = 0$  og  $1 + y^2 = \lambda$ , så er  $\lambda = 1$  og bibetingelsen gir  $x^2 = 5$ , eller  $x = \pm\sqrt{5}$ . Disse kandidatpunktene har  $f = 5$ .
- (d) Hvis  $1 + y^2 = \lambda$  og  $1 + x^2 = 2\lambda$ , så er  $1 + x^2 = 2(1 + y^2)$  ved eliminasjon av  $\lambda$ . Dette gir  $x^2 = 1 + 2y^2$ , og bibetingelsen gir da

$$x^2 + 2y^2 = 1 + 2y^2 + 2y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = 4$$

Dette gir  $y^2 = 1$ , eller  $y = \pm 1$ , og  $x^2 = 3$ , eller  $x = \pm\sqrt{3}$ . Dessuten er  $\lambda = 1 + y^2 = 2$ . Vi får kandidatpunktene  $(x, y; \lambda) = (\pm\sqrt{3}, \pm 1; 2)$  med  $f = 3 + 1 + 3 = 7$ .

Siden bibetingelsen  $x^2 + 2y^2 = 5$  er en ellipse med halvaksler  $a = \sqrt{5}$  og  $b = \sqrt{5/2}$ , er mengden av tillatte punkter begrenset. Dermed har vi et maksimum i Lagrange-problemet. Det er ingen tillatte punkter med degenerer bibetingelse, siden  $g(x, y) = x^2 + 2y^2$  har  $g'_x = 2x$  og  $g'_y = 4y$ , og  $g'_x = g'_y = 0$  kun holder i punktet  $(0, 0)$ , som ikke er tillatt (det ligger ikke på ellipsen). Dermed er  $f_{\max} = 7$ , siden kandidatpunktene  $(x, y; \lambda) = (\pm\sqrt{3}, \pm 1; 2)$  har  $f = 7$  og er kandidatpunktene med størst verdi.