SENSORVEILEDNING - Skriftlig eksamen

MET 11803
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	29.05.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	29.05.2019	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Løsning	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	29. mai 2019 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 40 \\ 5 & 10 & 16 & 51 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 5 & 10 & 16 & 51 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed uendelig mange løsninger med y fri siden y-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} -4z &= -4 & & & z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 11 & \Rightarrow \quad & x = 11 - 2y - 4(1) & x &= 7 - 2y \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (7 - 2y, y, 1)$ der y er en fri variabel.

b) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix} = 1(128 - 120) - a(32a - 60) + 4(20a - 40)$$

$$= 8 - 32a^2 + 60a + 80a - 160 = -32a^2 + 140a - 152$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $-32a^2 + 140a - 152 = 0$, som gir at

$$a = \frac{-140 \pm \sqrt{140^2 - 4(-32)(-152)}}{2(-32)} = \frac{-140 \pm 12}{-64} = \frac{35 \mp 3}{16}$$

Det vil si at $|A| = 0$ når $a = 2$ eller $a = 19/8 = 2.375$.

c) Når $a = 3$ er $|A| = -32(3)^2 + 140(3) - 152 = -20$. Dermed har vi at den inverse matrisen er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} 8 & -36 & 20 \\ -8 & -4 & 5 \\ 4 & 12 & -10 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 36 & 4 & -12 \\ -20 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

d) Systemet har eksakt én løsning hvis og bare hvis koeffisientmatrisen har determinant ulik null, det vil si $|A^7| \neq 0$. Siden $|AB| = |A| \cdot |B|$, har vi at $|A^7| = |A|^7$, så $|A^7| \neq 0$ er det samme som at $|A| \neq 0$. For $a = -1$ har vi fra Oppgave b) at $|A| = -32a^2 + 140a - 152 = -32 - 140 - 152 \neq 0$, dermed har systemet eksakt én løsning. Vi finner en formel for løsningen ved å multiplisere likningen med A^{-1} fra venstre gjentatte ganger:

$$\begin{aligned} A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}A^7 \cdot \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad A^6 \cdot \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ \Rightarrow A^{-1}A^6 \cdot \mathbf{x} = A^{-1}A^{-1}\mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad A^5 \cdot \mathbf{x} = (A^{-1})^2 \cdot \mathbf{b} \\ \Rightarrow \quad \cdots \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{x} = (A^{-1})^7 \cdot \mathbf{b} = A^{-7} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Oppgave 2.

a) Nullpunktene til nevneren $1-x^2$ er $x=1$ og $x=-1$, og telleren $x^3 \neq 0$ i $x=\pm 1$. Dermed er de vertikale asymptotene $x=-1$ og $x=1$. Polynomdivisjon gir

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$$

Dermed er det en skrå asymptote $y=-x$.

b) Vi finner den deriverte ved å bruke brøkregelen for derivasjon, som gir

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

Siden x^2 og $(1-x^2)^2$ ikke kan være negative, er f avtagende i de intervallene der $3-x^2 \leq 0$, det vil si $x^2 \geq 3$; nevneren har jo ikke nullpunkt i disse intervallene. Vi har derfor at f er avtagende i $(-\infty, -\sqrt{3}]$ og i $[\sqrt{3}, \infty)$.

Oppgave 3.

a) Vi bruker substitusjonen $u = 1-x$, som gir $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$, og dermed blir integralet

$$\int 30(1-x)^5 \,\mathrm{d}x = \int 30u^5 \cdot 1/(-1)\,\mathrm{d}u = -5u^6 + C = -5(1-x)^6 + C$$

b) Vi faktoriserer nevner som $4-9x^2 = (2+3x)(2-3x)$, og forenkler integranden (uttrykket som skal integreres) ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{12}{4-9x^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{2-3x} \quad \Rightarrow \quad 12 = A(2-3x) + B(2+3x)$$

Det vil si $12 = (2A+2B) + (3B-3A)x$, eller at $2A+2B = 12$ og $3B-3A = 0$. Dette lineære systemet kan skrives $A+B=6$ og $B=A$, som gir $A=B=3$. Integralet blir dermed

$$\int \frac{12}{4-9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{2+3x} + \frac{3}{2-3x}\,\mathrm{d}x = \ln|2+3x| - \ln|2-3x| + C = \ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + C$$

c) Vi kan forenkle integranden (uttrykket som skal integreres) ved å utvide brøken med e^x; vi multipliserer altså teller og nevner med e^x:

$$\int \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$$

Deretter bruker vi substitusjonen $u = e^{2x}-1$, som gir $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$, og dermed får vi

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2e^{2x}}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2e^{2x}} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|e^{2x}-1| + C$$

Alternativt kunne vi først brukt substitusjonen $u = e^x$, som gir $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$, og dermed

$$\int \frac{2e^x}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2e^x}{u-1/u}\,\frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \int \frac{2}{u-1/u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$$

Dette kan vii løse ved å bruke substitusjonen $v = u^2-1$, og vi kommer selvsagt fram til samme svar ved å bruke denne metoden.

Oppgave 4.

a) Nåverdien av kontantstrømmen fra leie er

$$\int_0^\infty I(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 12\,e^{0.07t}\,e^{-0.10t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 12\,e^{-0.03t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{12}{-0.03}\,e^{-0.03t}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-400\,e^{-0.03t}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -400(e^{-0.03b}-1) = 400$$

b) Nåverdien av framtidige leieinntekter, det vil si for $t \in [7, \infty)$, er gitt ved

$$\int_7^\infty I(t)e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_7^\infty 12\,e^{0.07t}\,e^{-0.10t}\,\mathrm{d}t = \int_7^\infty 12\,e^{-0.03t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{12}{-0.03}\,e^{-0.03t}\right]_7^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-400\,e^{-0.03t}\right]_7^b = 400e^{-0.21}$$

Dersom salgssummen etter 7 år kalles V, så er nåverdien av salgssummen gitt ved

$$Ve^{-7r} = Ve^{-0.70}$$

Vi bestemmer når nåverdi av salgssum minst er lik nåverdi av framtidige leieinntekter ved å løse ulikheten

$$Ve^{-0.70} \geq 400e^{-0.21} \quad\Rightarrow\quad V \geq 400e^{-0.21}e^{0.70} = 400\,e^{0.49} \approx 652.9$$

For at vi skal vurdere å selge, må altså salgssummen være minst 652.9 millioner kroner.

Oppgave 5.

a) Vi finner de partiellderiverte til $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$, som er gitt ved $f'_x = -3x^2 + 3$ og $f'_y = 2y$. Førsteordensbetingelsene er $f'_x = f'_y = 0$, og dette gir

$$-3x^2 + 3 = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 1$$
$$2y = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 0$$

Dette gir to stasjonære punkter $(x,y) = (1,0), (-1,0)$. Hesse-matrisen til f er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

For $(x,y) = (1,0)$ er $\det H(f) = -12 < 0$, og når $(x,y) = (-1,0)$ er $\det H(f) = 12 > 0$, og $A,C > 0$ i dette tilfellet. Andrederivert-testen gir derfor at $(1,0)$ er et sadelpunkt og at $(-1,0)$ er et lokalt minimumspunkt for f.

b) Vi har $f(-1,2) = 4 + 1 - 3 = 2$, derfor er C nivåkurven $f(x,y) = 2$. I punktet $(x,y) = (-1,2)$ har tangenten stigningstall

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{-3x^2 + 3}{2} = 0$$

Derfor har tangenten likning $y - 2 = 0(x + 1)$, eller $y = 2$. For å finne ut om tangenten skjærer C i andre punkt, løser vi likningene $f(x,y) = 2$ og $y = 2$, og det gir

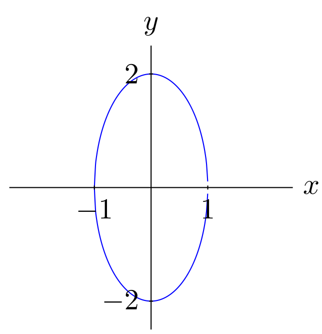
$$2^2 - x^3 + 3x = 2 \quad\Rightarrow\quad x^3 - 3x - 2 = 0$$

Vi vet at $x + 1$ er en faktor siden $x = -1$ er en løsning, og polynomdivisjon gir faktoriseringen

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)(x-2)(x+1) = (x+1)^2(x-2)$$

Dette betyr at $x = -1$ og $x = 2$ er løsninger, og tangenten skjærer derfor C i punktet $(x,y) = (2,2)$ i tillegg til $(x,y) = (-1,2)$.

c) Likningen $4x^2 + y^2 = 4$ kan skrives $x^2 + y^2/4 = 1$. Dette er en ellipse med sentrum i $(0,0)$ og med halvakser $a = \sqrt{1} = 1$ og $b = \sqrt{4} = 2$. Ellipsen er begrenset med $-1 \leq x \leq 1$ og $-2 \leq y \leq 2$. Skissen av ellipsen er vist nedenfor.



d) Optimeringsproblemet har Lagrange-funksjon $\mathcal{L} = y^2 - x^3 + 3x - \lambda(4x^2 + y^2)$. Lagrange-betingelsene er førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= -3x^2 + 3 - \lambda \cdot 8x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 2y - \lambda \cdot 2y = 0 \\ 4x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Vi løser disse likningene for å finne kandidatpunkter, og starter med den andre likningen siden den er enklest å løse: Vi har $2y - \lambda \cdot 2y = 2y(1-\lambda) = 0$, som gir $y = 0$ eller $\lambda = 1$. Vi ser på disse to tilfellene hver for seg:

i) Hvis $y = 0$, så er $x = \pm 1$ fra bibetingelsen, og den første likningen gir da $-\lambda \cdot 8x$ siden $x^2 = 1$. Dette gir $\lambda = 0$ siden $x = \pm 1 \neq 0$. Fra dette tilfellet får vi derfor kandidatpunktene

$$(x,y;\lambda) = (1,0;0), (-1,0;0)$$

med $f(1,0) = 2$ og $f(-1,0) = -2$.

ii) Hvis $\lambda = 1$, gir første likning at $-3x^2 + 3 - 8x = 0$. Vi løser annengradslikningen, og det gir $x = -3$ eller $x = 1/3$. Vi setter disse verdiene inn i bibetingelsen for å finne y. Når $x = -3$, får vi $36 + y^2 = 4$, eller $y^2 = -32$, som ikke har løsninger. Når $x = 1/3$, får vi $4(1/3)^2 + y^2 = 4$, eller $y^2 = 4 - 4/9 = 32/9$. Dette gir to løsninger $y = \pm\sqrt{32/9} = \pm\sqrt{32}/3 = \pm 4\sqrt{2}/3$. Fra dette tilfellet får vi derfor kandidatpunktene

$$(x,y;\lambda) = (1/3, 4\sqrt{2}/3; 1), (1/3, -4\sqrt{2}/3; 1)$$

med $f(1/3, \pm 4\sqrt{2}/3) = 122/27 \approx 4.52$.

Vi har totalt funnet fire kandidatpunkter, og dette er alle ordinære kandidatpunkter (det vil si alle løsninger av Lagrange-betingelsene). Siden bibetingelsen gir en ellipse, som er begrenset, har problemet en løsning ved ekstremverdisetningen. Denne løsningen må være et ordinært kandidatpunkt, siden en ellipse ikke har punkter med degenerert bibetingelse. Dermed er det beste kandidatpunktet et maksimumspunkt; det vil si at $f_{\max} = 122/27 \approx 4.52$ og at $(x,y) = (1/3, \pm 4\sqrt{2}/3)$ er maksimumspunktene.

Oppgave 6.

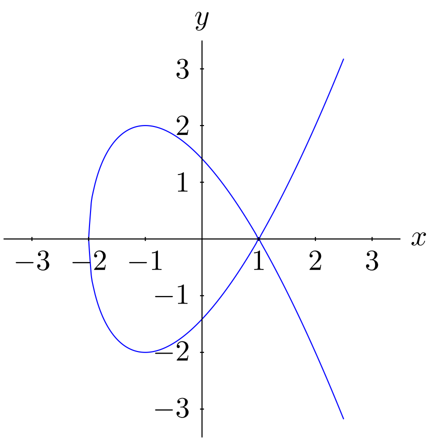
Bibetingelsen $y^2 - x^3 + 3x = 2$ kan skrives $y^2 = x^3 - 3x + 2$, eller $y^2 = h(x)$ med $h(x) = x^3 - 3x + 2$. Vi løser ulikheten $h(x) \geq 0$ siden $y^2 = h(x)$ ikke har løsninger om $h(x) < 0$. Nullpunktene er gitt ved

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$$

Dette finner vi for eksempel ved å prøve heltallsløsningen $\pm 1, \pm 2$ som går opp i konstantleddet, se at $x = 1$ er en løsning slik at $x - 1$ er en faktor, og bruke polynomdivisjon. Ulikheten blir dermed

$$h(x) = (x-1)^2(x+2) \geq 0$$

og vi ser at løsningene er gitt ved $x \geq -2$ siden $(x+1)^2 \geq 0$ for alle x. Alternativt kan vi sette opp fortegnsskjema for h. Bibetingelsen $y^2 - x^3 + 3x = 2$ har dermed løsninger hvis og bare hvis $x \geq -2$. Vi konkluderer at minimumsverdien $f_{\min} = -2$, og at minimumspunktet er $(x,y) = (-2,0)$. En skisse av punktene som oppfyller bibetingelse (som er kurven C fra Oppgave 5) er vist nedenfor.



Alternativt kan vi bruke Lagranges metode til å finne kandidatpunkter. Vi lar da $\mathcal{L} = x - \lambda(y^2 - x^3 + 3x)$. Lagrange-betingelsene er førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen, gitt ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 1 - \lambda(-3x^2 + 3) = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= -\lambda \cdot 2y = 0 \\ y^2 - x^3 + 3x &= 2 \end{aligned}$$

Siden $\lambda = 0$ ikke gir løsning på grunn av den første likningen, må $y = 0$ på grunn av den andre likningen. Bibetingelsen gir da $x = -2$ eller $x = 1$ (samme regning som ovenfor). Setter vi inn disse x-verdiene i første likning, får vi $\lambda = -1/9$ når $x = -2$, og ingen løsning for λ når $x = 1$. Det er derfor kun ett ordinært kandidatpunkt $(-2{,}0; -1/9)$. Man kan også sjekke at punktet $(1{,}0)$ er det eneste tillatte punkt med degenerert bibetingelse. Men det blir vanskelig å vise at det beste kandidatpunktet $(-2{,}0)$ er et minimum uten å bruke den første metoden. Den alternative metoden gir derfor maksimum 3p score om det ikke vises at kandidatpunktet er minimum.