Kontrollprøve 1 i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer
9.-16. oktober 2018

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

(a) Vi setter $u = x^{20}$ og får andregradslikningen $u^2 - 20u = 21$. Vi fullfører kvadratet: $(u-10)^2 = 21 + 10^2 = 121$ som gir $u = 10 \pm 11$. Fordi $u = x^{20} \geqslant 0$ får vi $x = \underline{\underline{\pm \sqrt[20]{21}}}$.

(b) Vi isolerer ett av rotuttrykkene: $\sqrt{1-3x} = 1 + \sqrt{4-x}$ og kvadrerer vs og hs. Det gir $1 - 3x = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x$. Vi isolerer rotuttrykket og deler på 2: $-\sqrt{4-x} = x + 2$. Så kvadrerer vi vs og hs: $4 - x = x^2 + 4x + 4$, dvs $x(x+5) = 0$ som gir $x = 0$ eller $x = -5$. Vi må teste om disse gir løsninger av den opprinnelige likningen.
$\underline{x = 0}$ vs: $\sqrt{1 - 3\cdot 0} - \sqrt{4-0} = 1 - 2 = -1$, hs: 1. De er ulike så $x = 0$ er ikke en løsning av den opprinnelige likningen.
$\underline{x = -5}$ vs: $\sqrt{1 - 3\cdot(-5)} - \sqrt{4-(-5)} = 4 - 3 = 1$, hs: 1. De er like så $x = \underline{\underline{-5}}$ er den eneste løsningen på likningen.

(c) Vi multipliserer hver side av likningen med $x(x+1)(x+2)$ og får likningen $(x+1)(x+2) + x(x+2) = 2x(x+1)$ med $x \neq 0, -1, -2$. Vi løser opp og trekker sammen og får $2x + 3 = 0$ som gir $x = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

(d) Vi multipliserer hver side av likningen med $(7 - \sqrt{x})(7 + \sqrt{x}) = 49 - x$ og får $2(7 + \sqrt{x}) + 2(7 - \sqrt{x}) = 49 - x$ og trekker sammen: $28 = 49 - x$ som gir $x = \underline{\underline{21}}$

Oppgave 2

(a) $2(x - (5 + \sqrt{3})(x - (5 - \sqrt{3})) = \underline{\underline{2x^2 - 20x + 44}}$

(b) $2(x+7)^2 = \underline{\underline{2x^2 + 28x + 98}}$

Oppgave 3

(a) Vi lar k være den minste av røttene hvor k er en parameter. Da er den største av røttene $k+3$ og dermed blir uttrykket $2(x-k)(x-(k+3)) = \underline{\underline{2x^2 - 2(2k+3)x + 2k(k+3)}}$. Det finnes mange andre løsninger. F. eks. kan s være midtpunktet mellom røttene. Da er $f(x) = 2(x - (s - \frac{3}{2}))(x - (s + \frac{3}{2})) = 2[x^2 - 2sx + (s^2 - \frac{9}{4})] = \underline{\underline{2x^2 - 4sx + 2s^2 - \frac{9}{2}}}$

(b) Vi lar k være den midterste av røttene. Da er den minste roten $k-1$ og den største roten $k+2$. Dermed blir uttrykket
$(x - (k-1))(x-k)(x-(k+2)) = \underline{\underline{x^3 - (3k+1)x^2 + (3k^2 + 2k - 2)x + k(k-1)(k+2)}}$. Også her finnes det mange andre løsninger.

Oppgave 4

(a) Vi faktoriserer hver de to andregradspolynomene og multipliserer tilsist alle de lineære faktorene. Vi har $3x^2 - 3x - 396 = 3(x^2 - x - 132) = 3(x+11)(x-12)$ og $2x^2 - 10 = 2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. Dermed er
$(3x^2 - 3x - 396)(2x^2 - 10) = \underline{\underline{6(x+11)(x-12)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}}$.

[1] Eksamenskoder MET11801 og MET11804

(b) Vi prøver oss frem og finner at $x = 2$ er en rot i $x^4 - 10x^3 - 63x^2 + 340x - 364$;
$2^4 - 10 \cdot 2^3 - 63 \cdot 2^2 + 340 \cdot 2 - 364 = 16 - 80 - 252 + 680 - 364 = 696 - (80 + 252 + 364) = 0$.
Så bruker vi polynomdivisjon og finner

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 10x^3 - 63x^2 + 340x - 364\big) : \big(x-2\big) = x^3 - 8x^2 - 79x + 182 \\
\underline{-x^4 \quad + 2x^3} \\
\qquad -8x^3 - 63x^2 \\
\qquad \underline{\;\; 8x^3 - 16x^2} \\
\qquad\qquad -79x^2 + 340x \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 79x^2 - 158x} \\
\qquad\qquad\qquad 182x - 364 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-182x + 364} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

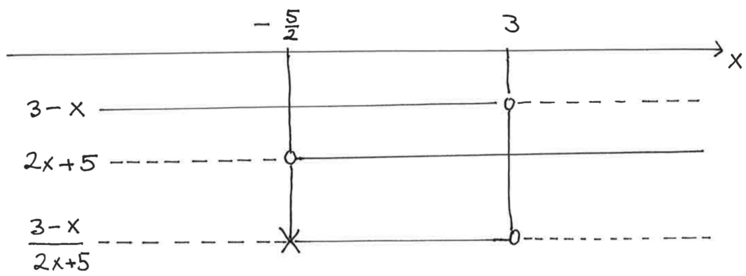
Vi prøver oss frem og finner at $x = 2$ er en rot i $x^3 - 8x^2 - 79x + 182$;
$2^3 - 8 \cdot 2^2 - 79 \cdot 2 + 182 = 8 - 32 - 158 + 182 = 0$. Så bruker vi polynomdivisjon og finner

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 8x^2 - 79x + 182\big) : \big(x-2\big) = x^2 - 6x - 91 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad -6x^2 - 79x \\
\qquad \underline{\;\; 6x^2 - 12x} \\
\qquad\qquad -91x + 182 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 91x - 182} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Endelig har $x^2 - 6x - 91$ røttene $x = -7$ og $x = 13$. Dette gir faktoriseringen
$x^4 - 10x^3 - 63x^2 + 340x - 364 = \underline{\underline{(x-2)^2(x+7)(x-13)}}$

Oppgave 5

(a) Fordi vi har 0 på den ene siden av ulikheten og teller og nevner er førstegradsuttrykk kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 1.



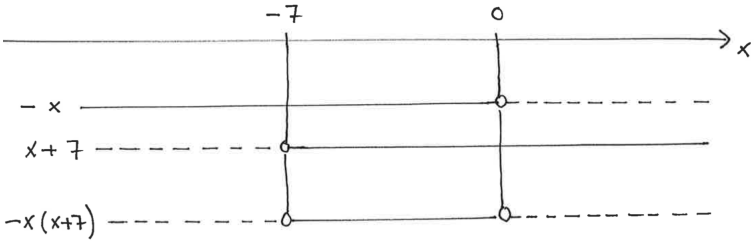
Figur 1: Fortegnsskjema a

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x < -\frac{5}{2} \text{ eller } x \geqslant 3}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}\rangle \cup [3, \infty\rangle}}$.

(b) Vi trekker fra 8 på begge sider for å få 0 på den ene siden av ulikheten: $(x+8)(1-x) - 8 > 0$. Så må vi løse opp og trekke sammen: $-x^2 - 7x > 0$. Vi faktoriserer vs og får $-x(x+7) > 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 2.

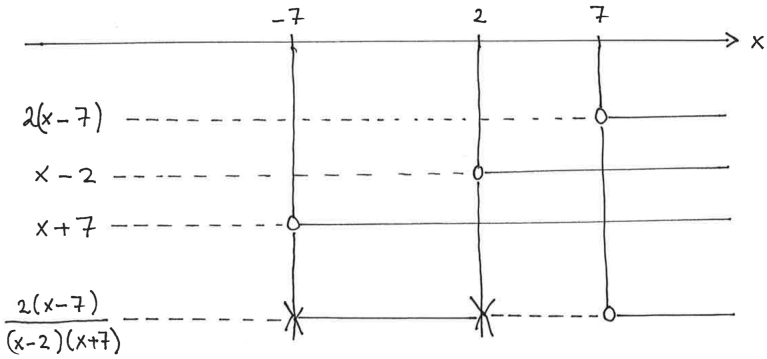
Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{-7 < x < 0}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -7, 0\rangle}}$.

(c) Vi legger til 1 på begge sider for å få 0 på den ene siden av ulikheten: $\frac{-x(x+3)}{(x-2)(x+7)} + 1 \leqslant 0$. Så multipliserer vi 1 med $\frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+7)}$ (som er lik 1 så ingenting endres) for å få samme nevner:



Figur 2: Fortegnsskjema b

$\frac{-x(x+3)}{(x-2)(x+7)} + \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+7)} \leqslant 0$. Så trekker vi sammen brøkene (samme nevner): $\frac{-x(x+3)+(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+7)} \leqslant 0$, løser opp og trekker sammen telleren: $\frac{2(x-7)}{(x-2)(x+7)} \leqslant 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 3.



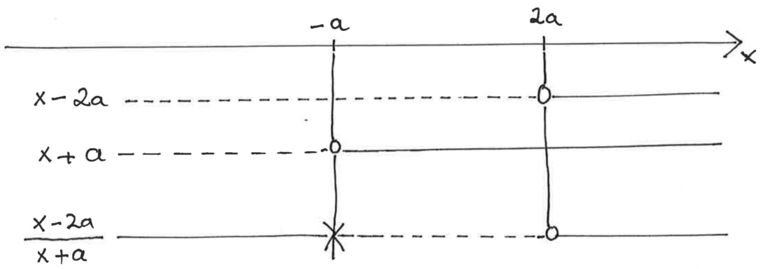
Figur 3: Fortegnsskjema c

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x < -7 \text{ eller } 2 < x \leqslant 7}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup \langle 2,7]}}$.

Oppgave 6

(a) Vi ser først at for $\underline{a = 0}$ får vi ulikheten $\frac{x}{x} > 0$ som har $\underline{\underline{\text{alle verdier av } x \text{ ulik } 0}}$ som løsninger: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty,0\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle}}$.

Anta $\underline{a > 0}$: Vi får fortegnsskjemaet i figur 4.



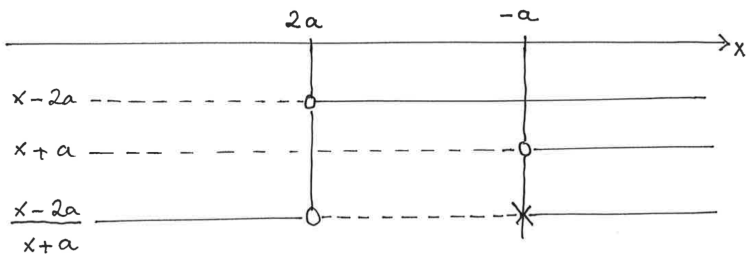
Figur 4: Fortegnsskjema ($a > 0$)

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x < -a \text{ eller } x > 2a}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty, -a\rangle \cup \langle 2a,\infty\rangle}}$

Anta $\underline{a < 0}$: Vi får fortegnsskjemaet i figur 5.

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x < 2a \text{ eller } x > -a}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty,2a\rangle \cup \langle -a,\infty\rangle}}$

(b) For $a = 0$ er ulikheten $\frac{1}{x^2} < 1$ som har løsninger, f. eks. gir $x = 2$ at $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ som er mindre enn 1. For $a \neq 0$ er $x^2 + a^2 > 0$ så vi kan (uten å få problemer) multiplisere begge sider av ulikheten med $x^2 + a^2$ og får ulikheten $1 > x^2 + a^2$, dvs $x^2 < 1 - a^2$. Denne ulikheten har løsninger (f. eks. $x = 0$) akkurat når $1 - a^2 > 0$. Dette tilsvarer $a^2 < 1$, dvs $|a| < 1$. Vi har altså løsninger på ulikheten akkurat når $\underline{\underline{-1 < a < 1}}$.



Figur 5: Fortegnsskjema ($a < 0$)

Oppgave 7

(a) Nåverdien er $\frac{30\,\text{mill}}{1{,}12^6} = 15{,}20$ millioner.

(b) Nåverdien av 30 millioner om 5 år med rente r er $\frac{30\,\text{mill}}{(1+r)^5}$. Vi får likningen $\frac{30\,\text{mill}}{1{,}12^6} = \frac{30\,\text{mill}}{(1+r)^5}$. Dette gir $(1+r)^5 = 1{,}12^6$, dvs $1 + r = (1{,}12^6)^{\frac{1}{5}}$, dvs $r = 1{,}12^{\frac{6}{5}} - 1 = \underline{\underline{14{,}57\%}}$.

(c) Se utregningen i (b).

Oppgave 8

(a) Vi beregner fremtidsverdien av betalingsstrømmen om 5 år (i millioner):

$$30 \cdot 1{,}15^5 + 30 \cdot 1{,}15^4 + 20 \cdot 1{,}15^3 + 20 \cdot 1{,}15^2 + 20 \cdot 1{,}15 = 212{,}65$$

Patentet må altså koste $\underline{\underline{212{,}65}}$ millioner for at internrenten skal bli 15%.

(b) Vi prøver oss frem og finner at $r = \underline{\underline{17{,}7\%}}$ gir nåverdien

$$-\left(30 + \frac{30}{1{,}177} + \frac{25}{1{,}177^2} + \frac{25}{1{,}177^3} + \frac{25}{1{,}177^4}\right) + \frac{230}{1{,}177^5} = -0{,}07 \approx 0$$

Internrenten er derfor tilnærmet 17,7%.

Oppgave 9

(a) Den årlige vekstfaktoren er e^r. Nåverdien til kontantstrømmen er dermed

$$\underline{\underline{\frac{A}{e^{10r}} + \frac{A}{e^{11r}} + \cdots + \frac{A}{e^{28r}} + \frac{A}{e^{29r}}}}$$

som er en geometrisk rekke begge veier. Lest bakfra får vi $a_1 = \frac{A}{e^{29r}}$, $k = e^r$ og $n = 20$. Summen er da

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{A}{e^{29r}} \cdot \frac{e^{20r} - 1}{e^r - 1} = \frac{400\,000}{e^{29\cdot 0{,}045}} \cdot \frac{e^{20\cdot 0{,}045} - 1}{e^{0.045} - 1} = \frac{400\,000}{e^{1{,}305}} \cdot \frac{e^{0{,}9} - 1}{e^{0.045} - 1} = \underline{\underline{3\,439\,693{,}06}}$$

(b) Hvis annuiteten betales for alltid er nåverdien til kontantstrømmen

$$\underline{\underline{\frac{A}{e^{10r}} + \frac{A}{e^{11r}} + \cdots + \frac{A}{e^{mr}} + \ldots}}$$

som er en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \frac{A}{e^{10r}}$ og $k = e^{-r}$. Summen er da

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{A}{e^{10r}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-r}} = \frac{A}{e^{10r}} \cdot \frac{e^r}{e^r - 1} = \frac{400\,000}{e^{0{,}45}} \cdot \frac{e^{0{,}045}}{e^{0.045} - 1} = \underline{\underline{5\,796\,287{,}83}}$$

(c) Fra en utregning som i (b), men hvor $a_1 = \frac{A}{e^r}$ får vi likningen

$$\frac{A}{e^r} \cdot \frac{e^r}{e^r - 1} = K_0 \qquad \text{dvs} \qquad \frac{A}{e^r - 1} = K_0$$

Vi løser likningen for e^r og får

$$e^r = \frac{K_0 + A}{K_0} = \frac{10\,000\,000 + 400\,000}{10\,000\,000} = 1{,}04$$

Så prøver vi med $r = \underline{\underline{3{,}92\%}}$ som gir $e^{0{,}0392} = 1{,}039978 \approx 1{,}4$.

(d) Se (c).

Oppgave 10

(a) Vi ser at funksjonen har et nullpunkt for $x = 2$ og at symmetriaksen er den vertikale linjen $x = 7$. Dermed er det andre nullpunktet gitt av $x = 7 + 5 = 12$. Altså er uttrykket på formen $a(x-2)(x-12)$. For å bestemme a setter vi inn koordinatene til et punkt på grafen som vi lett kan bestemme koordinatene til (men ikke noen av nullpunktene fordi det leder til likninger $0 = 0$ som ikke forteller noe om a). Her er $(0{,}4)$ en god kandidat. Da får vi $a(-2)(-12) = 4$ som gir $a = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Altså er uttrykket $f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{6}(x-2)(x-12)}}$.

(b) Denne funksjonen har ingen nullpunkter, men vi har tydelig symmetrilinje $x = 4$ og maksverdi -50. Innsatt i standardformen $a(x-s)^2 + d$ gir dette $a(x-4)^2 - 50$. For å bestemme a må vi sette inn et punkt på grafen som vi lett kan bestemme koordinatene til (men ikke toppunktet fordi det leder til likningen $0 = 0$ som ikke forteller noe om a). Her er $(8, -52)$ en god kandidat. Da får vi $a(8-4)^2 - 50 = -52$, dvs $a \cdot 16 = -2$ som gir $a = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$. Altså er uttrykket $f(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{8}(x-4)^2 - 50}}$.