SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11804
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	28.02.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	07.03.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Fagoppgave 1 i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

28. feb. – 7. mars 2019

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

(a)

$$250\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,029}} + 250\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,029})^2} + \cdots + 250\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,029})^{n-1}} + 250\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,029})^n}$$

(b) Summen av den geometriske rekken: $250\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,029})^n} \cdot \frac{(e^{0,029})^n - 1}{e^{0,029} - 1}$.
For $n = 10$: 2 138 826,69 for $n = 20$: 3 739 232,79 for $n = 40$: 5 832 823,11
for $n = 80$: 7 661 332,56 for $n = 1000$: 8 496 293,81.

(c) $250\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,029})^n} \cdot \frac{(e^{0,029})^n - 1}{e^{0,029} - 1} = 250\,000 \cdot \frac{1 - (e^{0,029})^{-n}}{e^{0,029} - 1}$ nærmer seg mer og mer
$250\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,029} - 1} = 8\,496\,293{,}813370\ldots$ når n blir større og større.

Oppgave 2

(a) Vi faktoriserer hver av de to andregradspolynomene og multipliserer tilsist alle de lineære faktorene. Vi har $6x^2 - 36 = 6(x^2 - 6) = 6(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$ og
$\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{187}{2} = \frac{1}{2}(x - 11)(x + 17)$. Dermed er
$(6x^2 - 36)(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{187}{2}) = \underline{\underline{3(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x - 11)(x + 17)}}$.

(b) Vi prøver oss frem og finner at $x = -1$ er en rot i $x^4 - 20x^3 + 78x^2 + 220x + 121$;
$(-1)^4 - 20(-1)^3 + 78(-1)^2 + 220(-1) + 121 = 1 + 20 + 78 - 220 + 121 = 0$. Så bruker vi polynomdivisjon og finner

$$\begin{array}{l}
\big(x^4 - 20x^3 + 78x^2 + 220x + 121\big) : \big(x + 1\big) = x^3 - 21x^2 + 99x + 121 \\
\underline{-x^4 \quad - x^3} \\
\qquad -21x^3 + 78x^2 \\
\qquad \underline{\;\;21x^3 + 21x^2} \\
\qquad\qquad 99x^2 + 220x \\
\qquad\qquad \underline{-99x^2 \;\; -99x} \\
\qquad\qquad\qquad 121x + 121 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-121x - 121} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi prøver oss frem og finner at $x = -1$ er en rot i $x^3 - 21x^2 + 99x + 121$;
$(-1)^3 - 21(-1)^2 + 99(-1) + 121 = -1 - 21 - 99 + 121 = 0$. Så bruker vi polynomdivisjon og finner

$$\begin{array}{l}
\big(x^3 - 21x^2 \;\; + 99x + 121\big) : \big(x + 1\big) = x^2 - 22x + 121 \\
\underline{-x^3 \quad - x^2} \\
\qquad -22x^2 \;\; + 99x \\
\qquad \underline{\;\;22x^2 \;\; + 22x} \\
\qquad\qquad 121x + 121 \\
\qquad\qquad \underline{-121x - 121} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Endelig har $x^2 - 22x + 121$ dobbeltroten $x = 11$. Dette gir faktoriseringen
$x^4 - 10x^3 - 63x^2 + 340x - 364 = \underline{\underline{(x + 1)^2(x - 11)^2}}$

[1] Eksamenskoder MET11801 og MET11804

Oppgave 3

(a) Vi multipliserer hver side av likningen med $(x+1)(x+2)(x+3)$ og får likningen $(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+3)=3(x+1)(x+2)$ med $x \neq -1,-2,-3$. Vi løser opp og trekker sammen og får $4x+6=0$ som gir $\underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$

(b) Vi setter $u=x^3$ og får andregradslikningen $u^2-19u=216$. Vi fullfører kvadratet: $(u-9{,}5)^2=216+9{,}5^2=306{,}25$ som gir $u=9{,}5\pm 17{,}5$. Fordi $u=x^3 \geqslant 0$ får vi $\underline{\underline{x=3}}$ og $\underline{\underline{x=-2}}$.

(c) Vi multipliserer hver side av likningen med $(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})=4-x$ og får $7(2+\sqrt{x})+7(2-\sqrt{x})=4-x$ og trekker sammen: $28=x-4$ som gir $\underline{\underline{x=32}}$

(d) Vi isolerer ett av rotuttrykkene: $\sqrt{4-3x}=7-\sqrt{5-x}$ og kvadrerer vs og hs. Det gir $4-3x=49+14\sqrt{5-x}+5-x$. Vi isolerer rotuttrykket og deler på 2: $7\sqrt{5-x}=x+25$. Så kvadrerer vi vs og hs: $245-49x=x^2+50x+625$, dvs $x^2+99x=-380$. Vi løser andregradslikningen ved å fullfører kvadratet:$(x+\frac{99}{2})^2=(\frac{91}{2})^2$ som gir $x=-4$ eller $x=-95$. Vi må teste om dette gir løsninger av den opprinnelige likningen.
$\underline{x=-4}$ vs: $\sqrt{4-3\cdot(-4)}-\sqrt{5-(-4)}=4-3=1$, hs: 7. De er ulike så $x=0$ er ikke en løsning av den opprinnelige likningen.
$\underline{x=-95}$ vs: $\sqrt{4-3\cdot(-95)}-\sqrt{5-(-95)}=17-10=7$, hs: 7. De er like så $\underline{\underline{x=-95}}$ er den eneste løsningen på likningen.

Oppgave 4

(a) Vi beregner fremtidsverdien av betalingsstrømmen om 6 år (i millioner):

$$70\cdot 1{,}12^5+70\cdot 1{,}12^4+50\cdot 1{,}12^3+50\cdot 1{,}12^2+50\cdot 1{,}12+50=472{,}48$$

Patentet må altså koste $\underline{\underline{472{,}48}}$ millioner for at internrenten skal bli 12%.

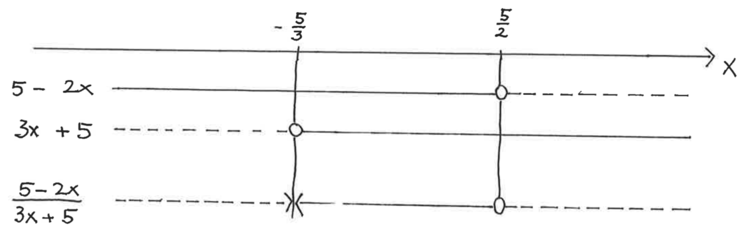
(b) Vi prøver oss frem og finner at $r=\underline{\underline{14{,}07\%}}$ gir nåverdien

$$-\left(70\cdot 1{,}1407^5+70\cdot 1{,}1407^4+50\cdot 1{,}1407^3+50\cdot 1{,}1407^2+50\cdot 1{,}1407+50\right)+\frac{500}{1{,}1407^5}\approx 0$$

Internrenten er derfor tilnærmet 14,07%.

Oppgave 5

(a) Fordi vi har 0 på den ene siden av ulikheten og teller og nevner er førstegradsuttrykk kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 1.

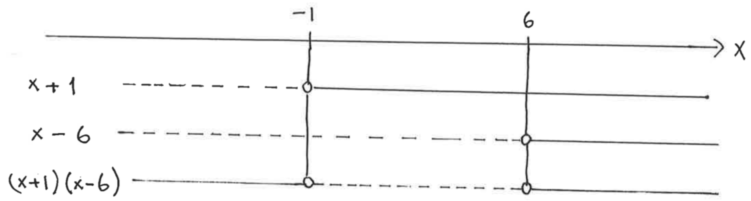


Figur 1: Fortegnsskjema a

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x<-\frac{5}{3} \text{ eller } x \geqslant \frac{5}{2}}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty,\, -\frac{5}{2}\rangle \cup [\frac{5}{3},\, \infty\rangle}}$.

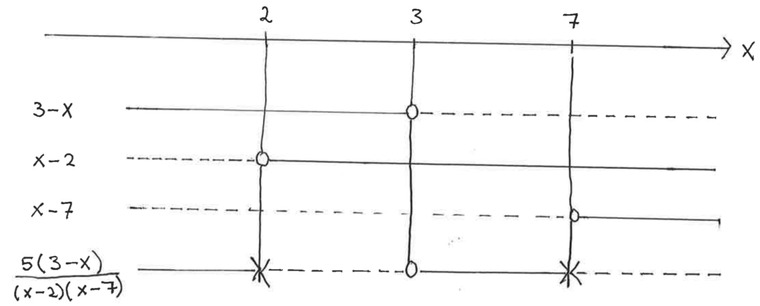
(b) Vi legger til 6 på begge sider for å få 0 på den ene siden av ulikheten: $x(5-x)+6>0$. Så må vi løse opp og trekke sammen: $-x^2+5x+6>0$. Multipliserer med -1 på begge sider: $x^2-5x-6<0$. Vi faktoriserer vs og får $(x+1)(x-6)<0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 2.

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{-1<x<6}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x\in\langle -1,6\rangle}}$.



Figur 2: Fortegnsskjema b

(c) Vi legger til 1 på begge sider for å få 0 på den ene siden av ulikheten: $\frac{1+4x-x^2}{x^2-9x+14}+1>0$. Så multipliserer vi 1 med $\frac{x^2-9x+14}{x^2-9x+14}$ (som er lik 1 så ingenting endres) for å få samme nevner: $\frac{1+4x-x^2}{x^2-9x+14}+\frac{x^2-9x+14}{x^2-9x+14}>0$. Så trekker vi sammen brøkene (samme nevner): $\frac{1+4x-x^2+x^2-9x+14}{x^2-9x+14}\leqslant 0$, trekker sammen telleren og faktoriserer nevneren: $\frac{5(3-x)}{(x-2)(x-7)}\leqslant 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema: Se figur 3.



Figur 3: Fortegnsskjema c

Vi leser av løsningene: $\underline{\underline{x<2 \text{ eller } 3<x<7}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x\in\langle-\infty,2\rangle\cup\langle 3,7\rangle}}$.

Oppgave 6

(a) Nåverdien er $\frac{25\,\text{mill}}{1{,}15^7}=9{,}40$ millioner.

(b) Nåverdien av 25 millioner om 9 år med rente r er $\frac{25\,\text{mill}}{(1+r)^9}$. Vi får likningen $\frac{25\,\text{mill}}{1{,}15^7}=\frac{25\,\text{mill}}{(1+r)^9}$. Dette gir $(1+r)^9=1{,}15^7$, dvs $1+r=(1{,}15^7)^{\frac{1}{9}}$, dvs $r=1{,}15^{\frac{7}{9}}-1=\underline{\underline{11{,}48\%}}$.

(c) Se utregningen i (b).

Oppgave 7

(a) Hvis $a=0$ har vi ulikheten $1\leqslant 0$ som ikke har noen løsninger (ikke oppfylt for noen x).
Hvis $a>0$ får vi fra et fortegnsskjema at ulikheten har løsninger: $x\in\langle 0,a]$.
Hvis $a<0$ får vi fra et annet fortegnsskjema at ulikheten har løsninger: $x\in[a,0\rangle$. Altså har ulikheten løsninger for $\underline{\underline{\text{alle } a \text{ ulik } 0}}$.

(b) Vi skriver om venstresiden ved å fullfører kvadratet: $(x-a)^2-a^2+3a<0$, dvs $(x-a)^2<a(a-3)$. Siden venstresiden alltid er større eller lik 0, må høyresiden være større enn 0. Da har ulikheten løsninger, nemlig $a-\sqrt{a(a-3)}<x<a+\sqrt{a(a-3)}$. Ulikheten $a(a-3)>0$ har løsninger $\underline{\underline{a<0 \text{ eller } a>3}}$ som også kan skrives som $\underline{\underline{a\in\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 3,\infty\rangle}}$.

Oppgave 8

(a) $\frac{1}{2}(x-(1+\sqrt{2})(x-(1-\sqrt{2}))=\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}}$

(b) $\frac{1}{2}x(x-2)=\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2-x}}$

Oppgave 9

(a) Vi lar s være midtpunktet mellom røttene. Da er $f(x) = \frac{1}{2}(x-(s-5))(x-(s+5)) = \frac{1}{2}[x^2 - 2sx + (s^2-25)] = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - sx + \frac{1}{2}(s^2-25)}}$ røttene $x = s-5$ og $x = s+5$. Det finnes mange andre løsninger.

(b) Vi lar k være dobbeltroten. Da er den største roten $k+5$. Dermed blir uttrykket $(x-k)^2(x-(k+5)) = \underline{\underline{x^3 - (3k+5)x^2 + k(3k+10)x - k^2(k+5)}}$. Også her finnes det mange andre løsninger.

Oppgave 10

(a) Vi ser at funksjonen har et nullpunkt for $x = 5$ og at symmetriaksen er midt mellom $x = 0$ og $x = 3$ fordi $f(0) = -2 = f(3)$, dvs at symmetriaksen er den vertikale linjen $x = \frac{3}{2}$. Dermed er det andre nullpunktet gitt av $x = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$. Altså er uttrykket på formen $a(x+2)(x-5)$. For å bestemme a setter vi inn koordinatene til et punkt på grafen som vi lett kan bestemme koordinatene til (men ikke noen av nullpunktene fordi det leder til likninger $0 = 0$ som ikke forteller noe om a). Her er $(0,-2)$ en god kandidat. Da får vi $a(0+2)(0-5) = -2$ som gir $a = \frac{1}{5}$. Altså er uttrykket $f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{5}(x+2)(x-5)}}$.

(b) Denne funksjonen har ingen nullpunkter, men vi har tydelig vertikal symmetrilinje $x = 7$ og maksverdi -1. Innsatt i standardformen $a(x-s)^2 + d$ gir dette $a(x-7)^2 - 1$. For å bestemme a må vi sette inn et punkt på grafen som vi lett kan bestemme koordinatene til (men ikke toppunktet fordi det leder til likningen $0 = 0$ som ikke forteller noe om a). Her er $(3,-7)$ en god kandidat. Da får vi $a(3-7)^2 - 1 = -7$, dvs $a \cdot 16 - 1 = -7$ som gir $a = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$. Altså er uttrykket $f(x) = \underline{\underline{-\frac{3}{8}(x-7)^2 - 1}}$.