SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11804
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	03.10.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	11.10.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Fagoppgave i MET1181[1] - Matematikk for siviløkonomer

3. okt. – 11. okt. 2019

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi setter $v = x^2$ og får andregradslikningen $v^2 - 5v - 36 = 0$ med løsninger $v = 9$, $v = -4$, dvs $x^2 = 9$, $x^2 = -4$. Fordi $x^2 \geqslant 0$ får vi bare $\underline{\underline{x = \pm 3}}$.

b) Vi setter $v = \sqrt{x}$ og får den samme likningen $v^2 - 5v - 36 = 0$ som i (a). Dermed får vi $\sqrt{x} = 9$ eller $\sqrt{x} = -4$. Fordi $\sqrt{x} \geqslant 0$ får vi bare $\underline{\underline{x = 81}}$.

c) Vi setter $v = \frac{1}{x}$ og får igjen den samme likningen $v^2 - 5v - 36 = 0$ som i (a). Dermed får vi $\frac{1}{x} = 9$ eller $\frac{1}{x} = -4$, som gir $\underline{\underline{x = \frac{1}{9}}}$, $\underline{\underline{x = -\frac{1}{4}}}$.

d) Vi isolerer den ene roten

$$\sqrt{2x-1} = 5 - \sqrt{x-1}$$

og kvadrerer begge sider

$$2x - 1 = 5^2 - 10\sqrt{x-1} + (x-1)$$

Så isolere vi den gjenværende roten

$$x - 25 = -10\sqrt{x-1}$$

og kvadrerer begge sider

$$x^2 - 50x + 625 = 100(x-1)$$

dvs

$$x^2 - 150x + 725 = 0$$

som har løsninger $x = 5$, $x = 145$. Vi tester om dette gir løsninger av den opprinnelige likningen.

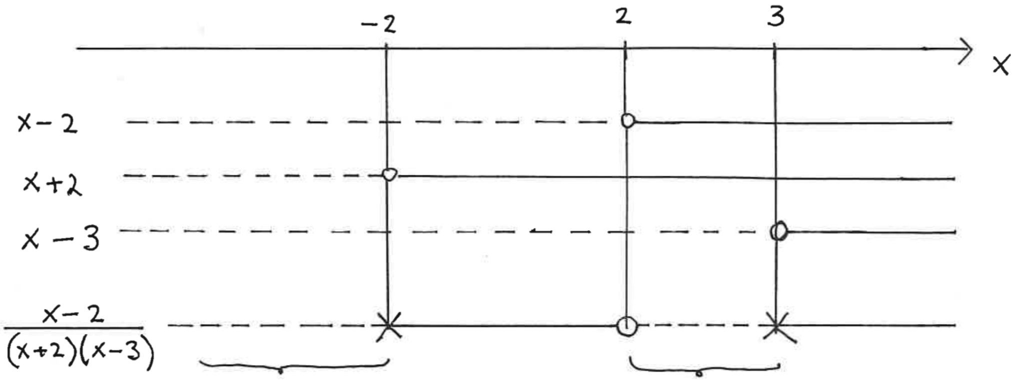
For $x = 145$ er venstresiden $\sqrt{2 \cdot 145 - 1} + \sqrt{145 - 1} = 19 + 12 = 31$ som ikke er lik høyresiden.

For $x = 5$ er venstresiden $\sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 - 1} = 3 + 2 = 5$ som også er høyresiden.

Konklusjonen er at $\underline{\underline{x = 5}}$ er eneste løsning.

Oppgave 2

a) Ulikheten har 0 på høyresiden og en faktorisert brøk på venstresiden. Da kan vi bruke fortegnsskjema for å løse ulikheten:



Figur 1: Fortegnsskjema i 2a

[1] Eksamenskode MET11804

som gir $\underline{\underline{x < -2 \text{ eller } 2 \leqslant x < 3}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup [2,3\rangle}}$.

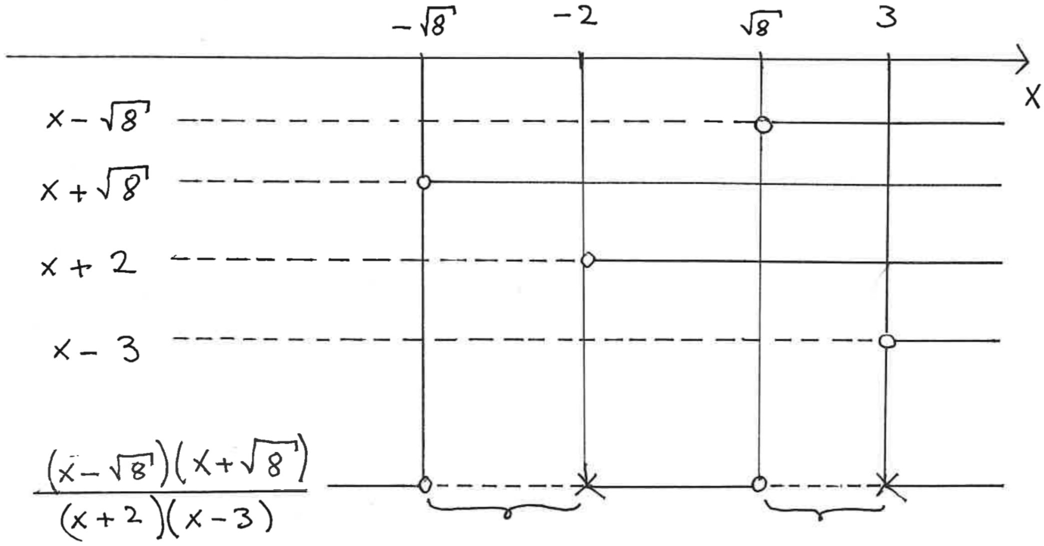
b) Vi skriver om til en ekvivalent ulikhet med 0 på høyresiden og én brøk på venstresiden:

$$\frac{(x-2)+(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \leqslant 0$$

Så løser vi opp, trekker sammen og faktoriserer telleren:

$$\frac{(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})}{(x+2)(x-3)} \leqslant 0$$

Nå kan vi bruke fortegnsskjema:



Figur 2: Fortegnsskjema i 2b

som gir $\underline{\underline{-\sqrt{8} \leqslant x < -2 \text{ eller } \sqrt{8} \leqslant x < 3}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in [-\sqrt{8}, -2\rangle \cup [\sqrt{8}, 3\rangle}}$.

Oppgave 3

Vi har

$$0{,}1x^4 - 2{,}4x^3 + 11{,}8x^2 + 31{,}2x + 16{,}9 = 0{,}1(x^4 - 24x^3 + 118x^2 + 312x + 169)$$

Vi setter inn $x = -1$ og får

$$(-1)^4 - 24(-1)^3 + 118(-1)^2 + 312(-1) + 169 = 1 + 24 + 118 - 312 + 169 = 0$$

Altså er $(x+1)$ en faktor. Bruker polynomdivisjon til å finne

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^4 - 24x^3 + 118x^2 + 312x + 169\big) : \big(x+1\big) = x^3 - 25x^2 + 143x + 169 \\
\underline{-x^4 \quad -x^3} \\
\qquad -25x^3 + 118x^2 \\
\qquad \underline{\;\; 25x^3 \;\; + 25x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 143x^2 + 312x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-143x^2 - 143x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 169x + 169 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-169x - 169} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi setter inn $x = 13$ i $x^3 - 25x^2 + 143x + 169$ og får

$$13^3 - 25 \cdot 13^2 + 143 \cdot 13 + 169 = 2197 - 4225 + 1859 + 169 = 0$$

Altså er $(x - 13)$ en faktor. Bruker polynomdivisjon til å finne

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 25x^2 + 143x + 169\big) : \big(x - 13\big) = x^2 - 12x - 13 \\
\underline{-x^3 + 13x^2} \\
\qquad -12x^2 + 143x \\
\qquad \underline{\quad 12x^2 - 156x} \\
\qquad\qquad\qquad -13x + 169 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 13x - 169} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Vi finner at $x^2 - 12x - 13$ har nullpunktene $x = -1$ og $x = 13$, dvs at $x^2 - 12x - 13 = (x + 1)(x - 13)$. Dermed er $0{,}1x^4 - 2{,}4x^3 + 11{,}8x^2 + 31{,}2x + 16{,}9 = \underline{\underline{0{,}1(x + 1)^2(x - 13)^2}}$.

Oppgave 4

a) Hvis innskuddet er K_0, vil balansen om 10 år være $K_0 \cdot 1{,}021^{10}$ som skal være 2 millioner. Vi løser derfor likningen $K_0 \cdot 1{,}021^{10} = 2$ mill og får nåverdien $K_0 = 2 \cdot 1{,}021^{-10}$ mill $= \underline{\underline{1\,624\,697{,}73}}$.

b) Etter 6 år er balansen $1\,624\,697{,}73 \cdot 1{,}021^6 = 1\,840\,462{,}73$. Når dette står på konto med 2,7% rente i 4 år gir det $1\,840\,462{,}73 \cdot 1{,}027^4 = \underline{\underline{2\,047\,428{,}77}}$.

c) Vi bruker uttrykkene i stedet for mellomregningene:

$$\begin{aligned}
2\,047\,428{,}77 &= 1\,840\,462{,}73 \cdot 1{,}027^4 = 1\,624\,697{,}73 \cdot 1{,}021^6 \cdot 1{,}027^4 \\
&= 2 \text{ mill} \cdot 1{,}021^{-10} \cdot 1{,}021^6 \cdot 1{,}027^4 \\
&= 2 \text{ mill} \cdot 1{,}021^{-4} \cdot 1{,}027^4 \\
&= 2\,\text{mill} \cdot \left(\frac{1{,}027}{1{,}021}\right)^4
\end{aligned}$$

d) Hvis innskuddet er K_0 vil balansen etter 10 år være $K_0 \cdot 1{,}021^6 \cdot 1{,}027^4 = K_0 \cdot 1{,}260\,191$ som gir likningen $K_0 \cdot 1{,}260\,191 = 3$ mill og $K_0 = 3$ mill : $1{,}260\,191 = \underline{\underline{2\,380\,592{,}32}}$.

e) Vi bruker uttrykkene i stedet for mellomregningene i (c):

$$1\,189\,532{,}60 = \frac{3 \text{ mill}}{1{,}260\,191} = \frac{3 \text{ mill}}{1{,}027^4 \cdot 1{,}021^6}$$

Oppgave 5

a) Fremtidsverdien etter 6 år er:

$$K_6 = -20 \cdot 1{,}1^6 - 20 \cdot 1{,}1^5 + 30 \cdot 1{,}1 + 45 = \underline{\underline{10{,}36}}$$

b) Nåverdien er:

$$K_0 = -20 - 20 \cdot 1{,}1^{-1} + 30 \cdot 1{,}1^{-5} + 45 \cdot 1{,}1^{-6} = \underline{\underline{5{,}85}}$$

c) Vi har $5{,}85 \cdot 1{,}1^6 = 10{,}36$.

Hvis A er en betaling om n år er nåverdien $A \cdot (1 + r)^{-n}$ mens fremtidsverdien om 6 år er $A \cdot (1 + r)^{6-n}$. For å komme fra nåverdien $A \cdot (1 + r)^{-n}$ til fremtidsverdien om 6 år multipliserer vi med $(1+r)^6$. Dette tallet er altså det samme uansett når betalingen skjer. Når vi multipliserer summen av nåverdiene av mange betalinger på ulike tidspunkter med $(1+r)^6$ får vi jo multiplisert hver av de enkelt nåverdiene med $(1+r)^6$ (multipliserer «inn i parantesen»). Det gir summen av fremtidsverdiene av hver av betalingene som nettopp er fremtidsverdien av kontantstrømmen.

Oppgave 6

a) Terminrenten er $6\% : 12 = 0{,}5\%$ og det er $25 \cdot 12 = 300$ terminer. Første betaling er $5 \cdot 12 = 60$ terminer fra nå. Den geometriske rekken av nåverdier er dermed

$$\underline{\underline{\frac{15\,000}{1{,}005^{60}} + \frac{15\,000}{1{,}005^{61}} + \cdots + \frac{15\,000}{1{,}005^{358}} + \frac{15\,000}{1{,}005^{359}}}}$$

Hvis vi regner summen av denne geometriske rekken «baklengs» slik at $a_1 = \frac{15\,000}{1{,}005^{359}}$, $k = 1{,}005$ og $n = 300$ får vi

$$\frac{15\,000}{1{,}005^{359}} \cdot \frac{1{,}005^{300} - 1}{0{,}005} = \underline{\underline{1\,734\,620{,}76}}$$

b) Vekstfaktoren for én termin er $e^{0.005}$. Ellers er det som i (a). Dermed blir den geometriske rekken av nåverdier:

$$\underline{\underline{\frac{15\,000}{e^{60\cdot 0{,}005}} + \frac{15\,000}{e^{61\cdot 0{,}005}} + \cdots + \frac{15\,000}{e^{358\cdot 0{,}005}} + \frac{15\,000}{e^{359\cdot 0{,}005}}}}$$

Vi regner igjen summen av denne geometriske rekken «baklengs» slik at $a_1 = \frac{15\,000}{e^{359\cdot 0{,}005}}$, $k = e^{0{,}005}$ og $n = 300$ og vi får

$$\frac{15\,000}{e^{359\cdot 0{,}005}} \cdot \frac{e^{300\cdot 0{,}005} - 1}{e^{0{,}005} - 1} = \underline{\underline{1\,730\,877{,}99}}$$

Oppgave 7

a) Kontantstrømmen av utbetalinger er som følger (n år):

År	15	16	17	...	$n+14$
Betaling	A	$A \cdot 1{,}03$	$A \cdot 1{,}03^2$	...	$A \cdot 1{,}03^{n-1}$

Dette gir følgende sum av nåverdier (med $n = 25$):

$$\underline{\underline{\frac{A}{1{,}05^{15}} + \frac{A \cdot 1{,}03}{1{,}05^{16}} + \frac{A \cdot 1{,}03^2}{1{,}05^{17}} + \cdots + \frac{A \cdot 1{,}03^{24}}{1{,}05^{39}}}}$$

Leser vi rekken baklengs får vi den geometriske rekken med $\underline{\underline{a_1 = \frac{A \cdot 1{,}03^{24}}{1{,}05^{39}}}}$, $\underline{\underline{k = \frac{1{,}05}{1{,}03}}}$ og $n = 25$.

Summen av rekken er da gitt som

$$\frac{A \cdot 1{,}03^{24}}{1{,}05^{39}} \cdot \frac{(\frac{1{,}05}{1{,}03})^{25} - 1}{\frac{1{,}05}{1{,}03} - 1} = A \cdot \frac{1{,}03^{24} \cdot \frac{1{,}05^{25}}{1{,}03^{25}} - 1{,}03^{24}}{1{,}05^{39} \cdot \frac{1{,}05 - 1{,}03}{1{,}03}} = A \cdot \frac{\frac{1{,}05^{25}}{1{,}03} - 1{,}03^{24}}{1{,}05^{39} \cdot \frac{0{,}02}{1{,}03}}$$

$$= A \cdot \frac{1{,}05^{25} - 1{,}03^{25}}{1{,}05^{39} \cdot 0{,}02}$$

Nåverdien er oppgitt til 20 millioner så vi får likningen

$$A \cdot \frac{1{,}05^{25} - 1{,}03^{25}}{1{,}05^{39} \cdot 0{,}02} = 20\,000\,000$$

som gir

$$A = 20\,000\,000 \cdot \frac{1{,}05^{39} \cdot 0{,}02}{1{,}05^{25} - 1{,}03^{25}} = \underline{\underline{2\,074\,847{,}72}}$$

b) Summen av nåverdier fortsetter bare rekken i (a):

$$\frac{A}{1{,}05^{15}} + \frac{A\cdot 1{,}03}{1{,}05^{16}} + \frac{A\cdot 1{,}03^2}{1{,}05^{17}} + \cdots + \frac{A\cdot 1{,}03^{n-1}}{1{,}05^{n+14}} + \dots$$

Dette er en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \frac{A}{1{,}05^{15}}$ og $k = \frac{1{,}03}{1{,}05}$ (som er mindre enn 1). Da er summen (ved en formel i læreboken)

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{A}{1{,}05^{15}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1{,}03}{1{,}05}} = \frac{A}{1{,}05^{15}} \cdot \frac{1{,}05}{0{,}02} = \frac{A}{1{,}05^{14}\cdot 0{,}02}$$

Nåverdien er oppgitt til 20 millioner så vi får likningen

$$\frac{A}{1{,}05^{14}\cdot 0{,}02} = 20\,000\,000$$

som gir

$$A = 20\,000\,000 \cdot 1{,}05^{14} \cdot 0{,}02 = \underline{\underline{791\,972{,}64}}$$

Oppgave 8

a) Fra grafen ser vi at symmetriaksen er $x = 20$ og minimalverdien er $y = 10$. Det gir standardformen $f(x) = a(x-20)^2 + 10$. Vi ser også at punktet $(25, 15)$ ligger på grafen. Det gir likningen $a(25-20)^2 + 10 = 15$ dvs $a = \frac{15-10}{25} = 0{,}2$. Så $f(x) = \underline{\underline{0{,}2(x-20)^2 + 10}}$.

b) Fra grafen ser vi at sentrum av ellipsen er $(4, 3)$ med halvakser $a = 10-4 = 6$ og $b = 6-3 = 3$. Det gir standardlikningen

$$\underline{\underline{\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}}$$

Oppgave 9

a) Vi ser at punktene $A = (2, 6)$, $B = (6, 10)$, $C = (12, 4)$ og $D = (8, 0)$ ligger på grafen. Vi ser at $ABCD$ er et rektangel (sidekantene har stigningstall ± 1). Da ligger skjæringspunktet for diagonalene midt mellom hyperbelgrenene. Skjæringspunktet har koordinat $(7, 5)$. Den horisontale og den vertikale asymptoten går gjennom dette punktet. Altså er den vertikale asymptoten linjen $x = 7$ og den horisontale asymptoten linjen $y = 5$. Da er uttrykket for hyperbelen på standardform gitt som $f(x) = 5 + \frac{a}{x-7}$. Vi vet at $f(8) = 0$, dvs $5 + \frac{a}{8-7} = 0$ som gir at $a = -5$. Altså er $f(x) = \underline{\underline{5 - \frac{5}{(x-7)}}}$.

b) Når x blir stor positiv eller stor negativ vil $\frac{5}{(x-7)}$ nærme seg 0 (henholdsvis ovenfra og nedenfra). Dermed vil $5 - \frac{5}{(x-7)}$ nærme seg 5 (henholdsvis nedenfra og ovenfra). Altså er linjen $y = 5$ den horisontale asymptoten til $f(x)$ som passer med det vi fant fra grafen. Vi har også

$$\frac{5}{(x-7)} \xrightarrow[x\to 7^+]{} \infty \quad \text{og} \quad \frac{5}{(x-7)} \xrightarrow[x\to 7^-]{} -\infty$$

som gir

$$5 - \frac{5}{(x-7)} \xrightarrow[x\to 7^+]{} -\infty \quad \text{og} \quad 5 - \frac{5}{(x-7)} \xrightarrow[x\to 7^-]{} \infty$$

Altså er linjen $x = 7$ en vertikal asymptote for $f(x)$ som også passer med det vi fant fra grafen. Fordi $f(x)$ har en definert verdi for alle $x \neq 7$ er dette den eneste vertikale asymptoten.

Oppgave 10

a) Uttrykket er

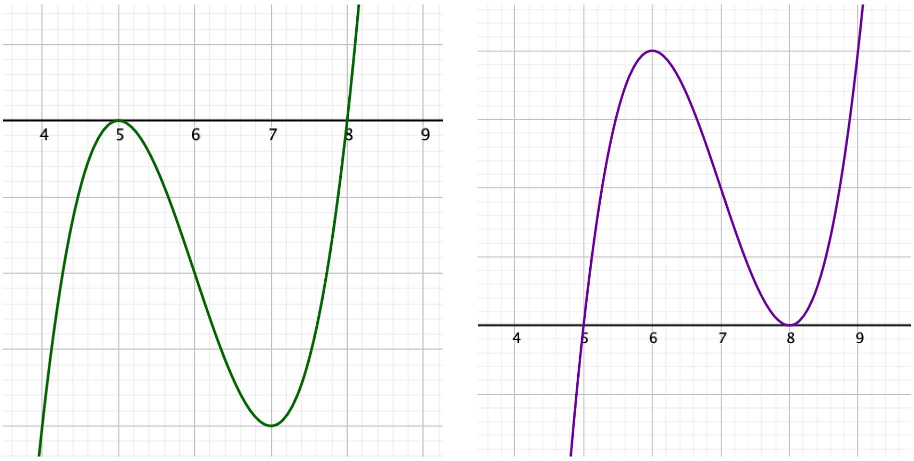
$$3\left(x-(5-\sqrt{3})\right)\left(x-(5+\sqrt{3})\right) = 3\left(x^2-10x+(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})\right) = 3(x^2-10x+25-3)$$
$$= \underline{\underline{3x^2-30x+66}}$$

b) Her er det en dobbeltrot. Uttrykket er

$$3\left(x-(-11)\right)\left(x-(-11)\right) = 3\left(x+11\right)^2 = \underline{\underline{3x^2+66x+363}}$$

Oppgave 11

La $x = t$ være den minste roten. Da er $x = t+3$ den største roten. Det er to tilfeller. Enten er t en dobbeltrot (tilfelle A) eller så er $t+3$ en dobbeltrot (tilfelle B).



Figur 3: Tilfelle A og B med $t = 5$

I tilfelle A får vi tredjegradsuttrykket

$$(x-t)^2(x-t-3) = x^3-3(t+1)x^2+3t(t+2)x-t^2(t+3)$$

I tilfelle B får vi tredjegradsuttrykket

$$(x-t)(x-t-3)^2 = x^3-3(t+2)x^2+3(t^2+4t+3)x-t(t^2+6t+9)$$

Vi kan skrive dette med delt forskrift slik:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x^3-3(t+1)x^2+3t(t+2)x-t^2(t+3) & \text{i tilfelle A} \\ x^3-3(t+2)x^2+3(t^2+4t+3)x-t(t^2+6t+9) & \text{i tilfelle B} \end{cases}}}$$