SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11804
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	04.03.2020	Kl. 09:00
Innlevering:	11.03.2020	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Fagoppgave i MET1181[1] - Matematikk for siviløkonomer

4. mars – 11. mars 2020

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Et produkt er lik 0 hvis og bare hvis minst en av faktorene er lik 0. Det gir følgende løsninger: $\underline{\underline{x=0}}$, $\underline{\underline{x=4}}$, $\underline{\underline{x=-2{,}5}}$ og $\underline{\underline{x=\frac{10}{3}}}$.

b) Vi utvider brøkene slik at vi får felles nevner i alle ledd:

$$\frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)}+\frac{3x(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{2(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

Dette gir likningen $2(x+2)+3x(x+1)=2(x+1)(x+2)$. Vi løser opp og trekker sammen: $3x^2+5x+4=2x^2+6x+4$. Vi trekker fra høyresiden på begge sider for å få likningen på en standardform: $x^2-x=0$. Vi har x som felles faktor i hvert av leddene så vi kan sette x utenfor parantesen: $x(x-1)=0$. Altså er løsningene $\underline{\underline{x=0}}$ og $\underline{\underline{x=1}}$.

c) Vi isolerer en av røttene $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}+1$ og kvadrering på begge sider gir $2x+1=x+2\sqrt{x}+1$. Så gjentar vi med den roten som er igjen: $x=2\sqrt{x}$ gir $x^2=4x$, dvs $x(x-4)=0$ med røttene $x=0$ og $x=4$. Fordi vi har kvadrert kan vi ha introdusert falske løsninger. Vi sjekker verdiene i den opprinnelige likningen

$$\begin{array}{llllll} \underline{x=0} & \text{venstre side:} & \sqrt{2\cdot 0+1}=1 & \text{høyre side:} & \sqrt{0}+1=1 & \text{ok} \\[2ex] \underline{x=4} & \text{venstre side:} & \sqrt{2\cdot 4+1}=3 & \text{høyre side:} & \sqrt{4}+1=3 & \text{ok} \end{array}$$

Altså er $\underline{\underline{x=0}}$ og $\underline{\underline{x=4}}$ løsningene på likningen.

d) Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1=x$, multiplikasjonsfaktor $k=\frac{x}{1{,}03}$ og antall ledd $n=20$. Det gir at likningen kan skrives som

$$x\cdot\frac{\left(\dfrac{x}{1{,}03}\right)^{20}-1}{\dfrac{x}{1{,}03}-1}=0$$

Uttrykket er ikke gyldig hvis $x=1{,}03$ (0 i nevner). Dette er heller ingen løsning på den opprinnelige likningen (venstresiden blir med $x=1{,}03$ lik $20\cdot 1{,}03$). Vi har

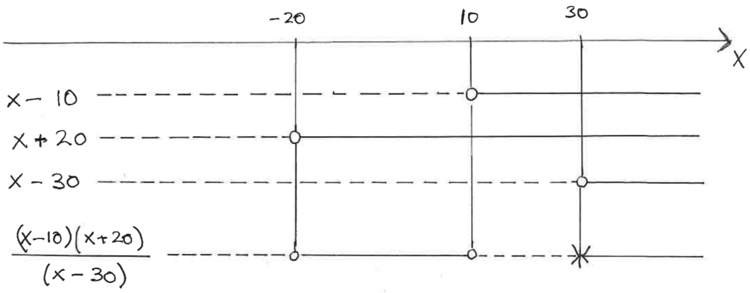
$$\left(\frac{x}{1{,}03}\right)^{20}=1 \quad \text{dvs} \quad \frac{x}{1{,}03}=\pm 1 \quad \text{dvs} \quad x=\pm 1{,}03$$

Men siden $x=1{,}03$ ikke er gyldig, får vi at de eneste løsningene er $\underline{\underline{x=0}}$ og $\underline{\underline{x=-1{,}03}}$.

Oppgave 2

a) Her er ulikheten på standardform: Det er 0 på høyresiden og venstresiden er én brøk hvor teller og nevner er faktorisert. Da kan vi bruke fortegnsskjema, se figur 1.

[1] Eksamenskode MET11804



Figur 1: Fortegnsskjema i 2a

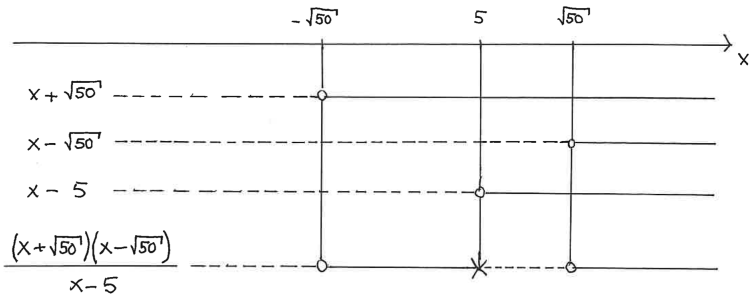
Vi får løsningene $\underline{\underline{x \in [-20\,,\,10] \cup \langle 30\,,\,\rightarrow\rangle}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{-20 \leqslant x \leqslant 10 \text{ eller } x > 30}}$.

b) Her må vi først få ulikheten på standardform.

$$\frac{x(x-10)}{(x-5)} \geqslant -10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-10)}{(x-5)} + 10 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-10)}{(x-5)} + \frac{10(x-5)}{(x-5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-50}{(x-5)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+\sqrt{50})(x-\sqrt{50})}{(x-5)} \geqslant 0$$

Da kan vi bruke fortegnsskjema, se figur 2.



Figur 2: Fortegnsskjema i 2b

Vi får løsningene $\underline{\underline{x \in [-\sqrt{50}\,,\,5\rangle \cup [\,\sqrt{50}\,,\,\rightarrow\rangle}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{-\sqrt{50} \leqslant x < 5 \text{ eller } x > \sqrt{50}}}$.

Oppgave 3

Vi gjetter på at polynomet $f(x)$ har en heltallsløsning, det må i så fall være en faktor i 49, dvs ± 1, ± 7, ± 49. Vi tester ut og finner at $x = 7$ er en rot. Da er $x - 7$ en faktor i $f(x)$. Vi bruker polynomdivisjon for å finne $f(x) : (x-7)$.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 49\big) : \big(x-7\big) = x^3 - 7x^2 + x - 7 \\
\underline{-x^4 \;\; + 7x^3} \\
\qquad\quad -7x^3 + 50x^2 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; 7x^3 - 49x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2 - 14x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 \;\; + 7x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -7x + 49 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\; 7x - 49} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Så prøver vi å finne en heltallsrot i $x^3 - 7x^2 + x - 7$. Mulighetene er ± 1, ± 7 og 7 er en rot. Da er $x - 7$ en faktor og vi bruker polynomdivisjon igjen:

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 7x^2 + x - 7\right) : \left(x - 7\right) = x^2 + 1 \\
\underline{-x^3 + 7x^2} \\
\qquad\qquad x - 7 \\
\qquad\quad \underline{-x + 7} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Da $x^2 + 1$ ikke har noen røtter kan vi ikke faktorisere videre. Dermed er svaret at $f(x) = x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 49 = \underline{\underline{(x-7)^2(x^2+1)}}$.

Oppgave 4

a) Summen av nåverdiene til hver av betalingene er

$$\frac{200\,000}{1{,}05^6} + \frac{200\,000}{1{,}05^7} + \cdots + \frac{200\,000}{1{,}05^{n+4}} + \frac{200\,000}{1{,}05^{n+5}}$$

b) Vi leser den geometriske rekken baklengs. Da er første ledd $a_1 = \frac{200\,000}{1{,}05^{n+5}}$, den multipliserende faktoren $k = 1{,}05$ og antall ledd er n. Det gir summen

$$\frac{200\,000}{1{,}05^{n+5}} \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}$$

Vi kan lage en tabell

n	10	20	50
Nåverdi	1 210 036,27	1 952 893,58	2 860 799,06

c) Hvis kontantstrømmen fortsetter i all fremtid får vi nåverdien

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{200\,000}{1{,}05^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1{,}05}} = \underline{\underline{3\,134\,104{,}67}}$$

Her leser vi den uendelig geometriske rekken fra venstre og da er multiplikasjonsfaktoren $k = \frac{1}{1{,}05}$.

Oppgave 5

a) Kostnadenes fremtidsverdi om 8 år med 15% rente gir prisen på patentet. Kostnadenes fremtidsverdi er en geometrisk rekke (i millioner, med den siste betalingen først)

$$250 \cdot 1{,}15 + 250 \cdot 1{,}15^2 + \cdots + 250 \cdot 1{,}15^7 + 250 \cdot 1{,}15^8 = 250 \cdot 1{,}15 \cdot \frac{1{,}15^8 - 1}{0{,}15} = 3\,946{,}46$$

fordi $a_1 = 250 \cdot 1{,}15$, $k = 1{,}15$ og $n = 8$. Patentet må altså koste $\underline{\underline{3\,946{,}46 \text{ millioner}}}$.

b) Hvis r er internrenten er nåverdien av kontantstrømmen $\dfrac{6000}{(1+r)^8} - 1200$ som skal være lik 0. Det gir likningen $(1+r)^8 = \dfrac{3600}{1200} = 3$ med løsning $r = \sqrt[8]{3} - 1 = \underline{\underline{14{,}72\%}}$.

Oppgave 6

a) Første betaling er om $4 \cdot 12 = 48$ terminer. Terminrenten er $\frac{3}{12}\% = 0{,}25\%$. Det er til sammen $12 \cdot 30 = 360$ terminer. Det gir den geometriske rekken

$$\frac{10\,000}{1{,}0025^{48}} + \frac{10\,000}{1{,}0025^{49}} + \cdots + \frac{10\,000}{1{,}0025^{406}} + \frac{10\,000}{1{,}0025^{407}}$$

Med $a_1 = \frac{10\,000}{1{,}0025^{407}}$, $k = 1{,}0025$ og $n = 360$ er summen gitt som

$$\frac{10\,000}{1{,}0025^{407}} \cdot \frac{1{,}0025^{360} - 1}{0{,}0025} = \underline{\underline{2\,109\,256{,}14}}$$

b) Vi kaller det nye terminbeløpet for A. Nåverdien til den nye kontantstrømmen blir da summen av to geometriske rekker

$$\frac{10\,000}{1{,}0025^{48}} + \frac{10\,000}{1{,}0025^{49}} + \cdots + \frac{10\,000}{1{,}0025^{119}} + \frac{A}{1{,}005^{120}} + \frac{A}{1{,}005^{121}} + \cdots + \frac{A}{1{,}005^{407}}$$

som skal være lik lånebeløpet 2 109 256,14. Det gir likningen

$$\frac{10\,000}{1{,}0025^{119}} \cdot \frac{1{,}0025^{72} - 1}{0{,}0025} + \frac{A}{1{,}005^{407}} \cdot \frac{1{,}005^{288} - 1}{0{,}005} = 2\,109\,256{,}14$$

med løsning

$$A = \left(2\,109\,256{,}14 - \frac{10\,000}{1{,}0025^{119}} \cdot \frac{1{,}0025^{72} - 1}{0{,}0025}\right) \cdot 1{,}005^{407} \cdot \frac{0{,}005}{1{,}005^{288} - 1} = \underline{\underline{18\,097{,}81}}$$

Oppgave 7

a) Betalingsstrømmen ser slik ut:

År	3	4	…	13	14
Utbetaling	A	$1{,}1 \cdot A$	…	$1{,}1^{10} \cdot A$	$1{,}1^{11} \cdot A$

Dette gir følgende sum av nåverdier

$$\frac{A}{1{,}05^3} + \frac{1{,}1 \cdot A}{1{,}05^4} + \cdots + \frac{1{,}1^{10} \cdot A}{1{,}05^{13}} + \frac{1{,}1^{11} A}{1{,}05^{14}}$$

Hvis vi leser denne geometriske rekken fra venstre får vi $a_1 = \frac{A}{1{,}05^3}$, $k = \frac{1{,}1}{1{,}05}$ og $n = 12$.

b) Rekken har da sum lik

$$\frac{A}{1{,}05^3} \cdot \frac{\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^{12} - 1}{\frac{1{,}1}{1{,}05} - 1}$$

For at kontrakten skal være balansert må dette være lik 80 millioner. Det gir likningen

$$\frac{A}{1{,}05^3} \cdot \frac{\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^{12} - 1}{\frac{1{,}1}{1{,}05} - 1} = 80 \quad \text{med løsning} \quad A = 80 \cdot 1{,}05^3 \cdot \frac{\frac{1{,}1}{1{,}05} - 1}{\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^{12} - 1} = \underline{\underline{5{,}90}}$$

Oppgave 8

a) Alle hyperbelfunksjoner kan skrives på standardformen $f(x) = d + \frac{a}{x-s}$ for noen tall a, d og s. Da er linjen $x = s$ den vertikale asymptoten og linjen $y = d$ den horisontale asymptoten. Fra grafen ser vi at $s = 6$ og $d = 10{,}5$. (Se f. eks. på linjen gjennom de to punktene $(5\,,11)$ og $(7\,,10)$ på grafen. Skjæringspunktet med den vertikale asymptoten ligger like langt fra begge punktene. Da ligger de også like langt fra skjæringspunktet med den horisontale asymptoten som må være det samme punktet.) Altså er $f(x) = 10{,}5 + \frac{a}{x-6}$. Fordi $(7\,,10)$ ligger på grafen er $f(7) = 10$, dvs $10{,}5 + \frac{a}{7-6} = 10$. Da får vi at $a = -0{,}5$ og $f(x) = \underline{\underline{10{,}5 - \frac{0{,}5}{x-6}}}$

b) Standardformen for likningen til en «rett» ellipse er

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

der $(x_0\,,y_0)$ er sentrum av ellipsen, a er horisontal halvakse og b er vertikal halvakse. Av figuren ser vi at $(x_0\,,y_0) = (5\,,4)$, $a = 9-5 = 4$ og $b = 7-4 = 3$. Altså er likningen for ellipsen

$$\underline{\underline{\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1}}$$

Oppgave 9

Alle andregradsfunksjoner $f(x)$ kan skrives på formen $f(x) = a(x-s)^2 + d$ hvor den vertikale linjen $x = s$ er symmetriaksen til parabelen og d er minimum eller maksimum til $f(x)$. Fra grafen ser vi at $s = 12$ og $d = 15$. Det gir $f(x) = a(x-12)^2 + 15$. Fra $f(7) = 10$ får vi likningen $a(7-12)^2 + 15 = 10$, dvs $a = -0{,}2$. Så $f(x) = \underline{\underline{-0{,}2(x-12)^2 + 15}}$.

a) Symmetriaksen er linjen $x = 12$ så $f(17) = f(7) = \underline{\underline{10}}$ (les av grafen).

b) Vi løser likningen $-0{,}2(x-12)^2 + 15 = 0$ som gir $(x-12)^2 = \frac{-15}{-0{,}2} = 75$, dvs $x - 12 = \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3}$ som gir røttene $x = \underline{\underline{12 \pm 5\sqrt{3}}}$.

Oppgave 10

a) Hvis $ax^2 + bx + c$ skal ha røtter r_1 og r_2 får vi at $ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2) = ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2$. Da må

$$\begin{cases} b = -a(r_1+r_2) \\ c = ar_1r_2 \end{cases}$$

Her er $r_1 = 2-\sqrt{2}$, $r_2 = 2+\sqrt{2}$ og $c = 12$. Da er $r_1 + r_2 = 4$ og $r_1r_2 = 4-2 = 2$. Det gir likningene

$$\begin{cases} b = -4a \\ 12 = 2a \end{cases}$$

Andre likning gir $a = 6$ og første gir da $b = -24$. Altså er uttrykket $\underline{\underline{6x^2 - 24x + 12}}$.

b) I dette tilfellet har vi $b = -7$, $r_1 + r_2 = 7$ og $r_1r_2 = 10$. Det gir likningene

$$\begin{cases} -7 = -7a \\ c = 10a \end{cases}$$

Første likning gir $a = 1$ og da gir den andre at $c = 10$. Altså er uttrykket $\underline{\underline{x^2 - 7x + 10}}$.

c) Siden det er et andregradsuttrykk som bare har én rot må denne roten gi symmetriaksen til parabelen: linjen $x = s = 4$. Parabelen må ellers være helt på én side av x-aksen. Siden punktet $(7,1)$ ligger på grafen, vender grafen oppover og $x = 4$ er et minimumspunkt. Dermed er $d = 0$ og vi har uttrykket $a(x-4)^2$. Fordi $(7,1)$ ligger på grafen får vi likningen $a(7-4)^2 = 1$ som gir $a = \frac{1}{9}$. Altså er uttrykket $\underline{\underline{\frac{1}{9}(x-4)^2}}$.

Oppgave 11

Hvis t er den midterst roten og d er avstanden mellom den midterst og den minste roten, er de tre røttene i stigende rekkefølge $t-d$, t og $t+2d$ (her antar vi at $d>0$). Da er tredjegradspolynomet

$$(x-t+d)(x-t)(x-t-2d) = \underline{\underline{x^3-(3t+d)x^2+(3t^2+2dt-2d^2)x-t(t^2+dt-2d^2)}}$$

Oppgave 12

Profittfunksjonen $P(x) = I(x) - K(x) = ax - (7200+3x) = (a-3)x - 7200$ (for $x \geqslant 0$) har ett nullpunkt $x = \frac{7200}{a-3}$ for $a \neq 3$ og ingen positive nullpunkter hvis $a \leqslant 3$. Vi løser likningen $\frac{7200}{a-3} = 150$ og får $a = \frac{7200}{150} + 3 = 51$. For $a > 3$ er $P(x)$ en voksende funksjon og profitten skifter derfor fra negative til positiv ved $x = 150$ når $\underline{\underline{a = 51}}$.