SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11804
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	09.10.2020	Kl. 09:00
Innlevering:	16.10.2020	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Fagoppgave i MET1181[1] - Matematikk for siviløkonomer

9. okt. – 16. okt. 2020

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi leser den geometriske rekken fra høyre mot venstre. Da er første ledd $a_1 = \frac{10\,000}{1{,}01^{215}}$, multiplikasjonsfaktoren $k = 1{,}01$ og antall ledd $n = 215 - 35 = 180$. Formelen for summen av en geometrisk rekke gir

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{10\,000}{1{,}01^{215}} \cdot \frac{1{,}01^{180} - 1}{0{,}01} = \underline{\underline{588\,179{,}46}}$$

F. eks. representerer denne summen nåverdien til en betalingsstrøm på 10 000 hver måned i 15 år med første betaling om 3 år og 12% nominell rente med månedlig forrentning.

b) Hvis situasjonen er som i (a), men med kontinuerlig forrentning vil den månedlige diskonteringsfaktoren være $e^{0{,}01}$, 10 000 betalt om 36 måneder har derfor nåverdi

$$\frac{10\,000}{(e^{0{,}01})^{36}} = \frac{10\,000}{e^{0{,}36}}$$

osv. Dette gir den oppgitte summen som nåverdien av den samme kontantstrømmen med samme nominelle rente, men med kontinuerlig forrentning.

Oppgave 2

(a) Nåverdien er

$$-30 - \frac{30}{1{,}15^2} + \frac{40}{1{,}15^8} + \frac{40}{1{,}15^9} + \frac{40}{1{,}15^{10}} = \underline{\underline{-18{,}35}}$$

(b) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 7 år er

$$-30 \cdot 1{,}15^7 - 30 \cdot 1{,}15^5 + \frac{40}{1{,}15} + \frac{40}{1{,}15^2} + \frac{40}{1{,}15^3} = \underline{\underline{-48{,}81}}$$

Merk at dette er det samme som nåverdisummen multiplisert med vekstfaktoren for 7 år: $-18{,}35 \cdot 1{,}15^7 = -48{,}81$.

(c) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 7 år er $-48{,}81$ så hvis Hege legger til en betaling av $\underline{\underline{\text{48,81 om 7 år}}}$ vil fremtidsverdien om 7 år av den nye betalingsstrømmen være 0. Det betyr at internrenten til den nye betalingsstrømmen er 15% fordi nåverdien til den nye betalingsstrømmen er $\frac{0}{1{,}15^7} = 0$.

Oppgave 3

a) Et produkt av tall er lik null hvis og bare hvis minst en av fakorene er null. Da får vi

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \quad &\text{eller}\quad 4x - 7 &= 0 \quad &\text{eller}\quad 9 + x &= 0 \\ x &= \underline{\underline{2}} \quad &\text{eller}\quad x &= \underline{\underline{\frac{7}{4}}} \quad &\text{eller}\quad x &= \underline{\underline{-9}} \end{aligned}$$

[1] Eksamenskode MET11804

b) Vi substituerer $u = x^3$ og får en andregradslikning $u^2 - 6u = 16$, fullfører kvadratet og får likningen $(u-3)^2 = 16 + 3^2 = 25$. Dermed er $u = 3-5 = -2$ eller $u = 3+5 = 8$. Vi substituerer tilbake og får $x^3 = -2$ eller $x^3 = 8$ som gir $x = \sqrt[3]{-2} = \underline{\underline{-\sqrt[3]{2}}}$ eller $x = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$.

c) Vi isolerer den ene roten ved å legge til $\sqrt{x-7}$ på begge sider:

$$\sqrt{3x+4} = \sqrt{x-7} + 5$$

Så kvadrerer vi på begge sider:

$$3x + 4 = x - 7 + 10\sqrt{x-7} + 25$$

Trekker sammen ledd og isolerer $10\sqrt{x-7}$:

$$2x - 14 = 10\sqrt{x-7}$$

Deler på 2 på begge sider:

$$x - 7 = 5\sqrt{x-7}$$

Så kvadrerer vi på begge sider

$$x^2 - 14x + 49 = 25x - 175$$

og trekker sammen:

$$x^2 - 39x = -224$$

Så fullfører vi kvadratet:

$$\left(x - \frac{39}{2}\right)^2 = -224 + \frac{39^2}{2^2} = \frac{625}{4} = \frac{25^2}{2^2}$$

Dette gir de to mulige løsningene

$$\underline{x = 7} \qquad \text{og} \qquad \underline{x = 32}\,.$$

Siden vi har kvadrert på begge sider av likningen (faktisk to ganger) må vi sjekke om de mulige løsningene faktisk er løsninger av den opprinnelige likningen:

Med $x = 7$ er venstresiden $\sqrt{3 \cdot 7 + 4} - \sqrt{7-7} = 5 - 0 = 5$ som er lik høyresiden og dermed er $\underline{\underline{x = 7}}$ en løsning.

Med $x = 32$ er venstresiden $\sqrt{3 \cdot 32 + 4} - \sqrt{32-7} = 10 - 5 = 5$ som er lik høyresiden og dermed er $\underline{\underline{x = 32}}$ en løsning.

d) Vi substituerer $u = e^{0,2x}$ og får likningen

$$\frac{u}{u-10} = 11$$

Multipliserer med $u - 10$ på begge sider (antar $u \neq 10$):

$$u = 11(u-10) = 11u - 110 \quad \text{som gir} \quad 10u = 110 \qquad \text{dvs} \qquad \underline{u = 11}$$

Substituerer tilbake og får likningen $e^{0,2x} = 11$. Setter venstresiden og høyresiden inn i ln( ) og får

$$\ln(e^{0,2x}) = \ln(11) \qquad \text{dvs} \qquad 0{,}2x = \ln(11) \qquad \text{dvs} \qquad \underline{\underline{x = 5 \cdot \ln(11)}}$$

(og da er $u = e^{\ln(11)} = 11 \neq 10$).

e) Ved regnereglene for logaritmefunksjoner får vi at $\ln(x) - \ln(x-3) = \ln\left(\frac{x}{x-3}\right)$. Likningen blir da

$$\ln\left(\frac{x}{x-3}\right) = 1{,}12$$

Setter venstresiden og høyresiden inn i $e^{(\,)}$ og får

$$e^{\ln\left(\frac{x}{x-3}\right)} = e^{1{,}12} \qquad \text{dvs} \qquad \frac{x}{x-3} = e^{1{,}12}$$

Multipliserer med $(x-3)$ på begge sider (og antar $x \neq 3$)

$$x = e^{1{,}12} \cdot x - 3e^{1{,}12}$$

Samler x-leddene på samme side av likningen

$$(e^{1{,}12} - 1)x = 3e^{1{,}12}$$

Deler på $(e^{1{,}12} - 1)$ på begge sider og får

$$\underline{\underline{x = \frac{3e^{1{,}12}}{e^{1{,}12} - 1}}}$$

som er større enn 3.

Oppgave 4

a) Høyresiden er 0 og dermed kan vi bruke fortegnsskjema etter at vi har faktorisert telleren. Vi fullfører kvadratet

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2 + 1$$

og ser at uttrykket alltid er større eller lik 1. Dermed er det ikke mulig å faktorisere telleren videre. Men det gjør ingenting. Vi vet nå at telleren er positiv for alle x og dermed er det fortegnet til nevneren som avgjør fortegnet til brøken. Vi får $\underline{\underline{x > 4}}$ (husk at $x = 4$ ikke er mulig fordi brøken da har 0 i nevneren).

b) Her har vi ikke 0 på høyresiden og da kan vi ikke bruke fortegnsskjema foreløbig. Trekker fra 1 på begge sider og ganger oppe og nede med neveren i den andre brøken:

$$\frac{2x-12}{(x-3)(x+4)} - 1 \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \geqslant 0$$

Vi kan trekke sammen de to brøkene fordi nevnerene er like. Vi ganger også ut parantesene i telleren:

$$\frac{2x-12-(x^2+x-12)}{(x-3)(x+4)} \geqslant 0$$

Så trekker vi sammen:

$$\frac{-x^2+x}{(x-3)(x+4)} \geqslant 0$$

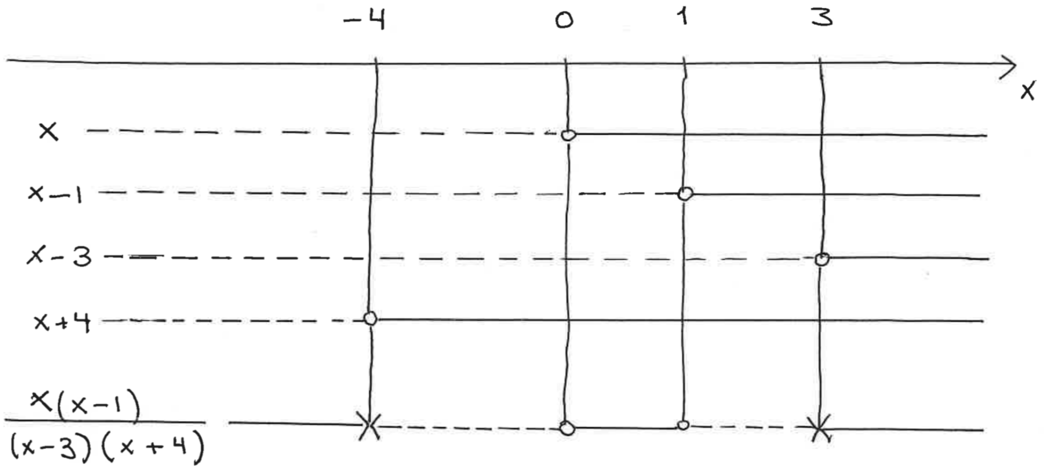
Her er x en felles faktor i telleren:

$$\frac{x(-x+1)}{(x-3)(x+4)} \geqslant 0$$

Hvis vi ikke liker fortegnet i den andre faktoren kan vi multiplisere begge sider av ulikheten med -1, men da må ulikheten snus:

$$\frac{x(x-1)}{(x-3)(x+4)} \leqslant 0$$

Vi bruker fortegnsskjema for å løse denne nye, ekvivalente ulikheten.



Figur 1: Fortegnsskjema i 2b

Dvs

$$\underline{\underline{-4 < x \leqslant 0 \quad \text{eller} \quad 1 \leqslant x < 3}}$$

Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle -4, 0] \text{ eller } x \in [1, 3\rangle}}$.

c) Eksponenten til e må ikke være større enn ln(20) så vi får ulikheten $-0{,}1x \leqslant \ln(20)$. (Sagt på en annen måte: Fordi $\ln(x)$ er en strengt voksende funksjon kan vi sette venstresiden og høyresiden inn ln( ) og få en ekvivalent ulikhet.) Hvis vi multipliserer begge sider med -10 får vi ulikheten og løsningen $\underline{\underline{x \geqslant -10 \cdot \ln(20)}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in [-10 \cdot \ln(20), \infty\rangle}}$.

d) Det som står inne i ln må ikke være større en e^3 (fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette venstresiden og høyresiden inn i $e^{(\,)}$ og få en ekvivalent ulikhet) og må samtidig være større enn 0 (ln er bare definert for postive tall). Dette gir ulikhetene $0 < x - 1 \leqslant e^3$. Vi legger til 1 i alle tre uttrykkene og får ulikhetene og svaret $\underline{\underline{1 < x \leqslant e^3 + 1}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle 1\,, e^3 + 1]}}$.

Oppgave 5

a) Vi må multiplisere ut nevneren for å gjøre polynomdivisjonen: $x(x-1)(x-5) = x^3 - 6x^2 + 5x$.

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ x^4 - 14x^3 + 53x^2 - 40x - 1\big) : \big(x^3 - 6x^2 + 5x\big) = x - 8 + \dfrac{-1}{x^3 - 6x^2 + 5x} \\
\underline{\ -x^4 \ + 6x^3 \ - 5x^2 \ } \\
\qquad\quad -8x^3 + 48x^2 - 40x \\
\qquad\quad \underline{\ \ \ 8x^3 - 48x^2 + 40x}
\end{array}
$$

Altså er resten lik $\underline{\underline{-1}}$.

b) Vi leser nå av de vertikale asymptotene som er de x-verdiene der nevneren i restleddet er null (og telleren er jo -1 som ikke er null uansett). Det gir de vertikale linjene $\underline{\underline{x = 0,\ x = 1 \text{ og } x = 5}}$ (y er fri). Dessuten er $\underline{\underline{y = x - 8}}$ en skrå asymptote fordi

$$
\frac{-1}{x^3 - 6x^2 + 5x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0
$$

Oppgave 6

Alle andregradsfunksjoner kan skrives på formen $f(x) = a(x-s)^2 + d$. Planen er først å finne dette uttrykket. Deretter løser vi likningen $f(x) = 0$. Her er den vertikale linjen $x = s$ asymptoten til andregradsfunksjonen. Vi ser at $s = 17$. Fordi parabelen er «sur» er a negativ og d gir derfor maksimumsverdien til $f(x)$ (for $x = 17$). Vi leser av $d = 110$. Fra grafen ser det ut til at $f(7) = 105$, dvs $a(7-17)^2 + 110 = 105$, dvs $100a = -5$, så $a = -0{,}05$. Altså er

$$
f(x) = -0{,}05(x-17)^2 + 110
$$

For å finne nullpunktene løser vi likningen $-0{,}05(x-17)^2 + 110 = 0$, dvs $(x-17)^2 = 2200$ som gir $\underline{\underline{x = 17 \pm 10\sqrt{22}}}$.

Oppgave 7

a) Denne ellipsen har en likning på formen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Her er $(x_0\,, y_0)$ sentrum i ellipsen. Fra grafen ser vi at $(x_0\,, y_0) = (5\,, 3)$. Videre er a lengden til den horisontale halvaksen, dvs den horsontale avstanden fra sentrum ut til ellipsen. Vi ser at $a = 10 - 5 = 5$. Tilsvarende er b lengden til den vertikale halvaksen. Vi ser at $b = 6 - 3 = 3$. Da er likningen

$$
\underline{\underline{\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}}
$$

b) Ettpunktsformelen gir at likningen for linjen L er $y-3=-0{,}3(x-10)$, dvs $y=-0{,}3x+6$. Vi erstatter y i ellipselikningen med dette uttrykket:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(-0{,}3x+6-3)^2}{9}=1$$

Vi multipliserer begge sider med $25\cdot 9=225$ og får

$$9(x^2-10x+25)+25(0{,}09x^2-1{,}8x+9)=225$$

Vi multipliserer inn og trekker sammen og får

$$11{,}25x^2-135x=-225$$

Vi deler begge sider med 11,25 og får

$$x^2-12x=-20$$

Så fullfører vi kvadratet

$$(x-6)^2=-20+6^2=16$$

Dvs $x=6\pm 4$, så $x=2$ er den nye roten og da er $y=-0{,}3\cdot 2+6=5{,}4$. Det andre skjæringspunktet mellom linjen L og ellipsen er altså $\underline{\underline{(2\,,5{,}4)}}$.

Oppgave 8

Alle hyperbelfunksjoner kan skrives som $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$. Her er den vertikale linjen $x=b$ (og y fri) den vertikale asymptoten til $f(x)$. Av grafen ser det ut til at $b=10$. Videre er den horisontale linjen $y=c$ (og x fri) den horisontale asymptoten til $f(x)$. Av grafen ser det ut til at $c=7$. For å bestemme a finner vi et punkt på grafen, f. eks. $(9\,,8)$. Dvs $7+\frac{a}{9-10}=8$ som gir at $a=-1$. Altså er

$$f(x)=\underline{\underline{7-\frac{1}{x-10}}}$$

Oppgave 9

a) Vi setter $y=f(x)$ og løser for x. Dvs $y=-0{,}5x+10$ som gir $x=-2y+20$. Da har den omvendte funksjonen funksjonsuttrykket $g(x)=\underline{\underline{-2x+20}}$. Her er definisjonsmengden D_g som alltid lik verdimengden til $f(x)$. Fordi $f(x)$ er en avtagende funksjon er største verdi $f(0)=10$ og den minste verdien er $f(20)=0$. Så $D_g=V_f=\underline{\underline{[0\,,10]}}$. Endelig er verdimengden til $g(x)$ som alltid lik definisjonsmengden til $f(x)$, dvs $V_g=\underline{\underline{[0\,,20]}}$.

b) Vi setter $y=2\ln(x+3)-1$ og løser for x. Vi legger til 1 på begge sider og deler på 2 på begge sider. Det gir

$$\ln(x+3)=\frac{y+1}{2}$$

Vi setter begge sider inn i $e^{(\,)}$ og får

$$e^{\ln(x+3)}=e^{\frac{y+1}{2}}\quad\text{dvs}\quad x+3=e^{\frac{y+1}{2}}\quad\text{dvs}\quad x=e^{0{,}5y+0{,}5}-3$$

Dermed har den omvendte funksjonen funksjonsuttrykket

$$g(x)=\underline{\underline{e^{0{,}5x+0{,}5}-3}}$$

Fordi $f(x)$ er en strengt voksende funksjon som går mot $-\infty$ når x nærmer seg 0 ovenfra og $f(x)$ vokser uten grenser når x går mot $+\infty$ er $V_f=$ hele tallinjen og dermed er $D_g=$ $\underline{\underline{\text{hele tallinjen}}}$. Dessuten er $V_g=D_f=\underline{\underline{\langle -3\,,\infty\rangle}}$.

Oppgave 10

a) i) Vi setter internrenten lik r. Nåverdien til kontantstrømmen er summen av nåverdiene til betalingene. Siden nåverdien skal være 0 får vi likningen

$$-10 + \frac{18}{e^{3r}} = 0 \quad \text{som gir} \quad e^{3r} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Innsatt i ln( ) gir dette $3r = \ln(9) - \ln(5)$ og $\underline{\underline{r = \frac{1}{3}[\ln(9) - \ln(5)] = 19{,}593\%.}}$

ii) Her får vi likningen

$$-\frac{10}{e^{5r}} + \frac{18}{e^{8r}} = 0 \quad \text{som gir} \quad \frac{e^{8r}}{e^{5r}} = \frac{18}{10} \quad \text{dvs} \quad e^{3r} = \frac{9}{5}$$

Dette er den samme likningen som i (i) så svaret er det samme:
$\underline{\underline{r = \frac{1}{3}[\ln(9) - \ln(5)] = 19{,}593\%.}}$

iii) Her får vi likningen

$$-\frac{10}{e^{5r}} + \frac{18}{e^{11r}} = 0 \quad \text{som gir} \quad \frac{e^{11r}}{e^{5r}} = \frac{18}{10} \quad \text{dvs} \quad e^{6r} = \frac{9}{5}$$

Dette gir $6r = \ln(9) - \ln(5)$ og $\underline{\underline{r = \frac{1}{6}[\ln(9) - \ln(5)] = 9{,}796\%.}}$

b) Nå gjør vi den samme utledningen uten å bestemme hva noen av parametrene skal være. Siden nåverdien skal være 0 får vi likningen

$$-\frac{A}{e^{mr}} + \frac{B}{e^{nr}} = 0 \quad \text{som gir} \quad \frac{e^{nr}}{e^{mr}} = \frac{B}{A} \quad \text{dvs} \quad e^{(n-m)r} = \frac{B}{A}$$

Innsatt i ln( ) gir dette $(n-m)r = \ln(B) - \ln(A)$ og $\underline{\underline{r = \frac{1}{(n-m)}[\ln(B) - \ln(A)]}}$.

c) Når A $(= 10)$ og B $(= 18)$ er fikserte tall ser vi at internrenten er gitt som en brøk med et fast tall i telleren (nemlig $\ln(B) - \ln(A) = \ln(18) - \ln(10)$) dividert med $n - m$ som er lengden på tidsrommet mellom de to betalingene. Vi ser at dette skjer i (ai-ii).

Dobbelt så stort tidsrom betyr at vi skal dele med et dobbelt så stort tall, altså blir brøken og dermed internrenten halvparten så stor. Vi ser at dette skjer i (aiii).