SENSORVEILEDNING - Fagoppgave

MET 11804
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	05.03.2021	Kl. 09:00
Innlevering:	12.03.2021	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Fagoppgave i MET1181[1] - Matematikk for siviløkonomer
5. mars – 12. mars 2021

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Summen er en geometrisk rekke som lest fra høyre har $a_1 = 5\,000 \cdot 1{,}002$, vekstfaktor $k = 1{,}002$ og antall ledd $n = 60$. Da gir formelen for summen av en geometrisk rekke

$$5\,000 \cdot 1{,}002 \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} = \underline{\underline{319\,041{,}16}}$$

Hvis du setter inn 5 000 hver måned på en konto (med første innbetaling i dag) med 2,4% nominell rente, månedlig forrentning og 60 terminer gir summen saldo 5 år fra nå.

b) Summen er en geometrisk rekke som lest fra høyre har $a_1 = \frac{5\,000}{e^{0,12}}$, vekstfaktor $k = e^{0,002}$ og antall ledd $n = 60$. Da gir formelen for summen av en geometrisk rekke

$$\frac{5\,000}{e^{0,12}} \cdot \frac{e^{60 \cdot 0,002} - 1}{e^{0,002} - 1} = \frac{5\,000}{e^{0,12}} \cdot \frac{e^{0,12} - 1}{e^{0,002} - 1} = \underline{\underline{282\,416{,}30}}$$

Hvis 5000 er den månedlige annuiteten med første tilbakebetaling om en måned, med 2,4% nominell rente og kontinuerlig forrentning og 5 års nedbetalingstid er den oppgitte summen lånebeløpet (nåverdien av kontantstrømmen).

Oppgave 2

a) Nåverdien av kontantstrømmen er summen av nåverdiene til betalingene:

$$-18 - \frac{25}{1{,}12} - \frac{15}{1{,}12^2} + \frac{95}{1{,}12^8} = \underline{\underline{-13{,}91}}$$

b) Fremtidsverdien til kontantstrømmen etter 7 år er (nåverdien) $\cdot\, 1{,}12^7 = \underline{\underline{-30{,}75}}$.

c) En ekstra betaling på $\underline{\underline{+30{,}75}}$ etter 7 år endrer fremtidsverdien til kontantstrømmen etter 7 år til 0. Dermed blir nåverdien til den nye kontantstrømmen også 0 og dermed er diskonteringsrenten 12% også internrenten til kontantstrømmen.

Oppgave 3

a) Nåverdien til en betaling på 30 millioner 7 år fra nå med nominell rente r (og kontinuerlig forrentning) er $\frac{30}{e^{7r}}$ som skal være 15 millioner. Det gir likningen $\frac{30}{e^{7r}} = 15$ som forenkles til $2 = \frac{30}{15} = e^{7r}$, dvs $7r = \ln(2)$ og $\underline{\underline{r = \frac{\ln 2}{7} = 9{,}90\%}}$.

b) Den samme utregningen for 10 år gir $R = \frac{\ln 2}{10}$. Dermed er

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(\frac{\ln 2}{10}\right)}{\left(\frac{\ln 2}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

så $R = 0{,}7r$. Alternativt kan vi sette opp likningen $\frac{30}{e^{7r}} = \frac{30}{e^{10R}}$ som gir $7r = 10R$ og derfor $R = 0{,}7r$.

Oppgave 4

[1] Eksamenskode MET11804

a) Vi opphøyer begge sider av $\sqrt{2x+3} = x-6$ i andre og får andregradslikningen $2x+3 = x^2-12x+36$, dvs $x^2-14x = -33$. Fullfører kvadratet og får $(x-7)^2 = 49-33 = 16$ som gir $x = 7 \pm 4$ dvs $x = 3$ eller $x = 11$. Men fordi vi har tatt kvadrater må vi sjekke om dette gir løsninger av den opprinnelige likningen.

$\underline{x=3}$: VS $= \sqrt{2\cdot 3+3} = 3$, mens HS $= 3-6 = -3$ så $x = 3$ er ikke en løsning på den opprinnelige likningen.

$\underline{x=11}$: VS $= \sqrt{2\cdot 11+3} = 5$ og HS $= 11-6 = 5$ så $\underline{\underline{x=11}}$ er den eneste løsningen på den opprinnelige likningen.

b) Et produkt er lik 0 hvis og bare hvis en av fakorene er lik 0. Dermed får vi enten $\ln(x)-3 = 0$, dvs $x = e^3$, eller $x^2-400 = 0$, dvs $x = \pm 20$. Fordi $e^x > 0$ for alle x gir $e^x+3 = 0$ ingen løsninger. Fordi $\ln(x)$ bare er definert for $x > 0$ er $\underline{\underline{x=e^3}}$ og $\underline{\underline{x=20}}$ de eneste gyldige løsningene på likningen.

c) Vi multipliserer begge side av $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)-10} = 11$ med $(\ln(x)-10)$ og får likningen $\ln(x) = 11\ln(x)-110$, dvs $110 = 10\ln(x)$. Vi dividerer begge sider med 10 og får likningen $\ln(x) = 11$ som gir $\underline{\underline{x=e^{11}}}$.

d) Vi substituerer $u = x^{-3}$ inn i likningen og får $u^2-6u = 16$. Fullfører kvadratet: $(u-3)^2 = 9+16 = 25$ som gir $u = 3\pm 5$, dvs $u = -2$ eller $u = 8$. Fordi $x = \frac{1}{\sqrt[3]{u}}$, er løsningene $\underline{\underline{x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ x = \frac{1}{2}}}$.

Oppgave 5

Fordi $e^x > 0$ for alle x kan vi se at venstresiden er større enn 0 uansett hva x er. Dessuten er nevneren alltid 1 større enn telleren og derfor er venstresiden alltid mindre enn 1. Dermed må $0 < t < 1$. Faktisk gir alle slike verdier av t en løsning: Vi multipliserer likningen med e^x+1 på begge sider og får $e^x = te^x + t$ som gir $(1-t)e^x = t$ dvs $e^x = \frac{t}{1-t}$ som er ok fordi $t < 1$. Dette gir løsningen $x = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right)$ fordi brøken er positiv når $0 < t < 1$. Denne begrunnelsen gir svarene:

a) Likningen har løsninger for $\underline{\underline{\text{alle } t \text{ med } 0 < t < 1 \text{ og ingen andre verdier}}}$.

b) Løsningen er $\underline{\underline{x = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right) \text{ for } 0 < t < 1}}$.

Oppgave 6

a) Vi faktoriserer telleren: $\frac{x(2-x)}{x-5} \leqslant 0$. Med fortegnsskjema får vi $\underline{\underline{0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ eller } x > 5}}$.

b) Vi trekker fra 1 på begge sider og trekker sammen venstresiden til én, faktorisert brøk. Det gir $\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-4)} \geqslant 0$. Med fortegnsskjema får vi $\underline{\underline{x < -3 \text{ eller } -1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ eller } x > 4}}$.

c) Ulikheten er bare definiert for $x > -4$. Fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette venstre- og høyresiden inn i $e^{(-)}$ og få en ekvivalent ulikhet: $5x+20 \leqslant e^3$ som gir $x \leqslant \frac{e^3}{5} - 4$. Svaret er altså $\underline{\underline{-4 < x \leqslant \frac{e^3}{5} - 4}}$.

d) Vi multipliserer med det positive tallet $e^{0,1x}$ på begge sider av ulikheten og får $e^{0,4x} \leqslant 170$. Fordi $\ln(x)$ er en strengt voksende funksjon kan vi sette venste- og høyresiden inn i $\ln(-)$ og få en ekvivalent ulikhet: $0,4x \leqslant \ln(170)$, dvs $x \leqslant 2,5 \cdot \ln(170)$.

e) Vi ser at $\ln(5-x)$ bare er definert for $x < 5$ og er lik 0 hvis $x = 4$. Dessuten er $e^x > 0$ for alle x og $4-x^2 = (2-x)(2+x)$. Dermed gir fortegnsskjema med faktorene $\ln(5-x)$, $2-x$ og $2+x$ at $\underline{\underline{-2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ eller } 4 \leqslant x < 5}}$.

Oppgave 7

a) Polynomdivisjon gir:

$$\begin{array}{l} \big(\;3x^3 \;\; -7x^2 -10x+14\big):\big(x^2-4x+3\big)=3x+5+\dfrac{x-1}{x^2-4x+3} \\ \underline{-3x^3+12x^2 \;\; -9x} \\ \qquad\qquad 5x^2-19x+14 \\ \qquad\quad \underline{-5x^2+20x-15} \\ \qquad\qquad\qquad\quad x \;\; -1 \end{array}$$

Resten er altså $\underline{\underline{x-1}}$.

b) Vi har

$$\frac{f(x)}{g(x)}=3x+5+\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=3x+5+\frac{1}{x-3}$$

Dette gir at linjen $\underline{\underline{x=3}}$ er en vertikal asymptote og linjen $\underline{\underline{y=3x+5}}$ er en skrå asymptote for $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Oppgave 8

a) Vi løser likningen $y=-0{,}2x+20$ for x og får $x=-5y+100$, dvs $\underline{\underline{g(x)=-5x+100}}$. Vi har $f(0)=20$ og $f(10)=18$ og $f(x)$ er strengt avtagende i hele definisjonsmengden $D_f=[0\,,\,10]$. Dermed er $\underline{\underline{D_g=V_f=[18\,,\,20]}}$ og $\underline{\underline{V_g=D_f=[0\,,\,10]}}$.

b) Vi løser likningen $y=e^{-0{,}1x}+3$ for x og får $x=-10\ln(y-3)$, dvs $\underline{\underline{g(x)=-10\ln(x-3)}}$. Vi har at $f(0)=4$, $f(x)$ er strengt avtagende i hele sitt definisjonsområde og linjen $y=3$ er en horisontal asymptote for $f(x)$ samtidig som $f(x)>3$ for alle x. Dermed er $\underline{\underline{D_g=V_f=\langle 3\,,\,4]}}$ og $\underline{\underline{V_g=D_f=[0\,,\rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 9

Alle andregradsfunksjoner kan skrives på formen $f(x)=a(x-s)^2+d$ der $x=s$ er symmetrilinjen og d er maksimumsverdien $f(s)$ hvis $a<0$. Dermed får vi
$\underline{\underline{f(x)=a(x-70)^2+200 \text{ for en parameter } a<0}}$.

Oppgave 10

Alle hyperbelfunksjoner kan skrives på formen $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$ der $x=b$ er den vertikale asymptoten og $y=c$ er den horisontale asymptoten. Altså er $f(x)=11+\frac{a}{x-9}$ og
$f(4)=11+\frac{a}{4-9}=11-0{,}2a$ som er oppgitt til å være 12. Vi løser likningen $11-0{,}2a=12$ for a og får $a=-5$. Dvs $f(x)=11-\frac{5}{x-9}$. Grafen skjære y-aksen i punktet $(0\,,f(0))=\underline{\underline{(0\,,\,\frac{104}{9})}}$ og x-aksen i punktet $\underline{\underline{(\frac{104}{11}\,,\,0)}}$. Her er $x=\frac{104}{11}$ løsningen på likningen $f(x)=0$.

Oppgave 11

Fra standardformen for likningen til en ellipse får vi

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-6)^2}{16}=1$$

Linjen har likning $x+y=10$ som gir $y=10-x$. Substituerer inn for y i ellipselikningen og får

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(4-x)^2}{16}=1$$

som gir

$$25x^2-232x=-400$$

som har løsninger

$$x=\frac{116\pm 24\sqrt{6}}{25}$$

Innsatt i $y=10-x$ får vi

$$y=10-\left(\frac{116\pm 24\sqrt{6}}{25}\right)=\frac{134\mp 24\sqrt{6}}{25}$$

som gir punktene

$$\underline{\underline{\left(\frac{116-24\sqrt{6}}{25},\frac{134+24\sqrt{6}}{25}\right)}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\left(\frac{116+24\sqrt{6}}{25},\frac{134-24\sqrt{6}}{25}\right)}}$$