Første fagoppgave i MET1181[1] - Matematikk for siviløkonomer

15. okt. – 22. okt. 2021

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) i) Summen er en geometrisk rekke som vi leser baklengs. Da er første ledd $a_1 = 6\,000 \cdot 1{,}0025^{25}$, multiplikasjonsfaktor $k = 1{,}0025$ og antall ledd $n = 96 - 24 = 72$. Formelen for en geometrisk rekke gir summen som

$$6\,000 \cdot 1{,}0025^{25} \cdot \frac{1{,}0025^{72} - 1}{0{,}0025} = \underline{\underline{503\,122{,}08}}$$

ii) Summen lest fra venstre gir saldo på en konto etter 8 år der det innbetales 6000 per måned i 6 år, dvs 72 innskudd, med første innbetaling i dag, 3% nominell rente og månedlig forrentning som gir månedsrente $\frac{3\%}{12} = 0{,}0025$.

b) Hvis du låner 1 000 000 i dag, betaler tilbake 15 000 hver måned i 10 år med første betaling om 4 år, r er nominell rente og det er kontinuerlig forrentning så gir venstresiden av likningen nåverdien til kontantstrømmen. Løsningen på likningen gir r som internrenten til kontantstrømmen.

Oppgave 2

a) i) Lånebeløpet er nåverdien av kontantstrømmen, dvs

$$\frac{10\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{60}} + \frac{10\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{61}} + \cdots + \frac{10\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{419}}$$

Dette er en geometrisk rekke som vi leser baklengs. Da er $a_1 = \frac{10\,000}{(1+\frac{r}{12})^{419}}$, $k = 1 + \frac{r}{12}$ og $n = 419 - 59 = 360$. Formelen for en geometrisk rekke gir summen som

$$\frac{10\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{419}} \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{360} - 1}{\frac{r}{12}} = \underline{\underline{\frac{120\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{419}} \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{360} - 1}{r}}}$$

ii) Hvis $r = 3\%$ gir dette

$$\frac{120\,000}{\left(1+\frac{3\%}{12}\right)^{419}} \cdot \frac{\left(1+\frac{3\%}{12}\right)^{360} - 1}{3\%} = \frac{120\,000}{1{,}0025^{419}} \cdot \frac{1{,}0025^{360} - 1}{0{,}03} = \underline{\underline{2\,046\,994{,}83}}$$

Hvis $r = 6\%$ gir dette

$$\frac{120\,000}{\left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{419}} \cdot \frac{\left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{360} - 1}{6\%} = \frac{120\,000}{1{,}005^{419}} \cdot \frac{1{,}005^{360} - 1}{0{,}06} = \underline{\underline{1\,242\,729{,}39}}$$

b) Med n betalinger blir nåverdien

$$\frac{10\,000}{1{,}005^{60}} + \frac{10\,000}{1{,}005^{61}} + \cdots + \frac{10\,000}{1{,}005^{n+59}}$$

Hvis vi leser den geometriske rekken fra venstre mot høyre får vi summen

$$\frac{10\,000}{1{,}005^{60}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}005}\right)^{n} - 1}{\left(\frac{1}{1{,}005}\right) - 1}$$

[1] Eksamenskode MET11804

Når n vokser uten grenser vil $\left(\frac{1}{1{,}005}\right)^n = \frac{1}{1{,}005^n}$ nærme seg 0 mer og mer. Nåverdien av den regulære kontantstrømmen uten ende kan derfor tolkes som

$$\frac{10\,000}{1{,}005^{60}} \cdot \frac{-1}{\left(\frac{1}{1{,}005}\right) - 1} = \frac{10\,000}{1{,}005^{60}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1{,}005}\right)} = \frac{10\,000}{1{,}005^{60}} \cdot \frac{1{,}005}{0{,}005} = \underline{\underline{1\,490\,158{,}11}}$$

og det er beløpet Kåre får låne.

Oppgave 3

a) i) Nåverdien av kontantstrømmen er

$$-120 - \frac{170}{1{,}14^2} + \frac{100}{1{,}14^5} + \frac{200}{1{,}14^7} + \frac{250}{1{,}14^8} = \underline{\underline{-31{,}31}}$$

ii) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 6 år er nåverdien multiplisert med vekstfaktoren for 6 år fordi

$$\begin{aligned} -31{,}31 \cdot 1{,}14^6 &= \left(-120 - \frac{170}{1{,}14^2} + \frac{100}{1{,}14^5} + \frac{200}{1{,}14^7} + \frac{250}{1{,}14^8}\right) \cdot 1{,}14^6 \\ &= -120 \cdot 1{,}14^6 - 170 \cdot 1{,}14^4 + 100 \cdot 1{,}14 + \frac{200}{1{,}14} + \frac{250}{1{,}14^2} \end{aligned}$$

som er uttrykket for fremtidsverdien om 6 år. Det gir altså $-31{,}31 \cdot 1{,}14^6 = \underline{\underline{-68{,}72}}$ (du får $-68{,}71$ hvis du regner ut den lange summen).

b) Med en ekstra betaling på $\underline{\underline{68{,}72}}$ etter 6 år blir fremtidsverdien til den nye kontantstrømmen 0. Men da er nåverdien til den nye kontantstrømmen $\frac{0}{1{,}14^6} = 0$ ved samme argument som for (a ii) og altså er internrenten 14%.

c) Endringen til *Høye kraner* er -50 om 8 år. Det tilsvarer $\frac{-50}{1{,}14^6} = \underline{\underline{-22{,}78}}$ om 2 år. Betalingen må derfor endres fra 170 til 147,22 om 2 år for at internrenten til denne siste kontantstrømmen skal være 14%.

Oppgave 4

a) Merk at $\ln(x)$ gjør at likningen bare er definert når $x > 0$. Et produkt av tall er lik 0 hvis og bare hvis minst en av faktorene er lik 0. Dette gir alternativene

$$\begin{array}{lll} e^x - 2 = 0 & \ln(x) - 3 = 0 & 4x^2 + 5x^3 = 0 \\ e^x = 2 & \ln(x) = 3 & x^2(4 + 5x) = 0 \\ x = \ln(2) & x = e^3 & x = 0 \quad \text{eller} \quad x = -\dfrac{4}{5} \end{array}$$

som gir løsningene $\underline{\underline{x = \ln(2) \text{ eller } x = e^3}}$ på den opprinnelige likningen.

b) Vi substituerer $u = x^4$ i likningen og får $u^2 - 12u = 64$. Ved å fullføre kvadratet får vi $(u-6)^2 = 64 + 36 = 100$ som gir $u = 6 \pm 10$, dvs $u = -4$ eller $u = 16$. Ved å substituere tilbake får vi likningene $x^4 = -4$ som ikke har noen løsning og $x^4 = 16$ som har løsningene $\underline{\underline{x = \pm 2}}$.

c) Vi kvadrerer først begge sider og får $2x - 5 = (2-x)^2$, dvs. $2x - 5 = 4 - 4x + x^2$ som gir $x^2 - 6x = -9$. Fullfører kvadratet og får $(x-3)^2 = -9 + 9 = 0$. Det gir $\underline{x = 3}$. Fordi vi starter med en irrasjonal likning må vi teste denne løsningen.
Innsatt i v.s: $\sqrt{2 \cdot 3 - 5} = 1$. Innsatt i h.s: $2 - 3 = -1$. Så v.s. $\neq$ h.s. $\underline{\underline{\text{Likningen har ingen løsninger}}}$.

Alternativt argument: Siden kvadratrøtter er større eller lik 0 må $2 - x \geqslant 0$, dvs. $x \leqslant 2$. Men da er $2x - 5 \leqslant -1$ og $\sqrt{2x-5}$ er ikke definert.

Oppgave 5

a) Vi samler alt på én brøk på venstre side slik at vi får 0 på høyresiden:

$$\begin{aligned}
\frac{4x+9}{x^2+2x+3}-2 &\geqslant 0 \quad \text{utvider brøken } \frac{-2}{1}=\frac{-2(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}\ : \\
\frac{4x+9-2(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} &\geqslant 0 \quad \text{løser opp og trekker sammen i telleren :} \\
\frac{-2x^2+3}{x^2+2x+3} &\geqslant 0 \quad \text{og endrer fortegn: } \frac{2x^2-3}{x^2+2x+3} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Fordi $x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \geqslant 2$ er nevneren alltid positiv og fortegnet avgjøres derfor av telleren $2x^2-3=2(x^2-1{,}5)=2(x-\sqrt{1{,}5})(x+\sqrt{1{,}5})$. Vi lager et fortegnsskjema og finner at $\underline{\underline{-\sqrt{1{,}5} \leqslant x \leqslant \sqrt{1{,}5}}}$ som også kan skrives slik: $\underline{\underline{x \in \left[-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,,\,\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right]}}$

b) Vi merker oss først at vi må ha $x>3$ for at ulikheten skal være definert. Ved å bruke regnereglene for logaritmer får vi at ulikheten kan skrives som

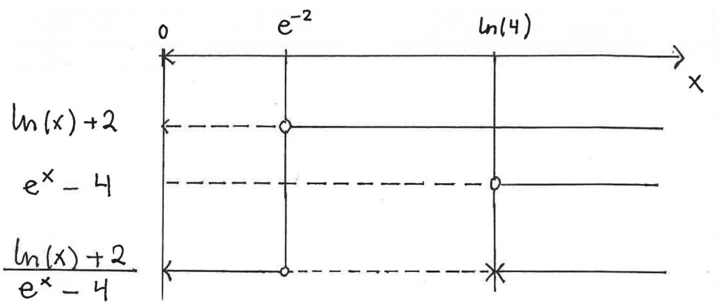
$$\ln\left(\frac{x(x-2)}{x-3}\right) \leqslant \ln 8$$

Fordi $\ln(x)$ er en strengt voksende funksjon er denne ulikheten ekvivalent med ulikheten

$$\begin{aligned}
\frac{x(x-2)}{x-3} &\leqslant 8 \quad \text{Trekker 8 fra på begge sider og utvider brøken:} \\
\frac{x(x-2)-8(x-3)}{x-3} &\leqslant 0 \quad \text{Løser opp og trekker sammen i telleren:} \\
\frac{x^2-10x+24}{x-3} &\leqslant 0 \quad \text{Finner røttene } x=4 \text{ og } x=6 \text{ til telleren og faktoriserer:} \\
\frac{(x-4)(x-6)}{x-3} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Den opprinnelige ulikheten er bare definert hvis $x-3>0$ og derfor er fortegnet til brøken lik fortegnet til telleren. Vi lager et fortegnskjema for $(x-4)(x-6) \leqslant 0$ og får $\underline{\underline{4 \leqslant x \leqslant 6}}$ som også kan skrives slik: $\underline{\underline{x \in [4\,,6]}}$

c) Vi merker oss at teller og nevner hver for seg er strengt voksende funksjoner med ett nullpunkt hver: $\ln(e^{-2})+2=0$ og $e^{\ln(4)}-4=0$. Vi ser også at telleren bare er definert for $x>0$. Dermed kan vi lage et fortegnsskjema:



Figur 1: Fortegnsskjema

Vi får $\underline{\underline{0 < x \leqslant e^{-2} \text{ eller } x > \ln(4)}}$ som også kan skrives slik: $\underline{\underline{x \in \langle 0\,, e^{-2}] \text{ eller } x \in \langle \ln(4)\,, \rightarrow \rangle}}$

Oppgave 6

a)

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^4+2x^3-28x^2+46x-21\right):\left(x-1\right)=x^3+3x^2-25x+21\\
\underline{-x^4\ \ +x^3}\\
\qquad 3x^3-28x^2\\
\qquad \underline{-3x^3\ \ +3x^2}\\
\qquad\qquad -25x^2+46x\\
\qquad\qquad \underline{25x^2-25x}\\
\qquad\qquad\qquad 21x-21\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-21x+21}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) Vi har $f(x)=q(x)\cdot(x-t)+r$ hvor r har x-grad lik 0 (r består bare av tall og t-er). Vi setter inn $x=t$ i denne likningen og får $f(t)=q(t)\cdot 0+r=r$. Altså er $\underline{\underline{r=t^4+2t^3-28t^2+46t-21}}$.

c) At polynomdivisjonen $f(x):g(x)$ har rest 0 for et tall t betyr fra (b) at $f(t)=0$, dvs vi leter etter nullpunkter til $f(x)$. Fra (a) har vi allerede $\underline{x=1}$. Så gjetter vi på et nullpunkt for $f(x):(x-1)=x^3+3x^2-25x+21$. F. eks. $\underline{x=3}$ som gir $3^3+3\cdot 3^2-25\cdot 3+21=27+27-75+21=0$. Så utfører vi polynomdivisjonen

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3+3x^2-25x+21\right):\left(x-3\right)=x^2+6x-7\\
\underline{-x^3+3x^2}\\
\qquad 6x^2-25x\\
\qquad \underline{-6x^2+18x}\\
\qquad\qquad -7x+21\\
\qquad\qquad \underline{7x-21}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Endelig faktoriserer vi $x^2+6x-7=\underline{(x-1)(x+7)}$. Altså: $f(x)=(x-1)^2(x-3)(x+7)$. Vi får dermed at t er enten $\underline{\underline{1,\ 3 \text{ eller } -7}}$ (og 1 er en dobbeltrot).

Oppgave 7

I standardformen $f(x)=a(x-s)^2+d$ er d maksimumsverdien (hvis a er negativ) og den leser vi av som $d=500$. Symmetriaksen $x=s=200$ ser vi fra grafen og dermed er $f(x)=a(x-200)^2+500$. Fra grafen ser vi også at $f(210)=495$. Det gir likningen $a(210-200)^2+500=495$, dvs. $100a=-5$, dvs. $a=\frac{-5}{100}=-0{,}05$. Altså $\underline{f(x)=-0{,}05(x-200)^2+500}$. For å finne nullpunktene løser vi likningen $f(x)=0$, dvs. $-0{,}05(x-200)^2+500=0$, dvs. $(x-200)^2=\frac{-500}{-0{,}05}=10\,000$ som gir $x=200\pm 100$, dvs. $\underline{\underline{x=100 \text{ eller } x=300}}$.

Oppgave 8

a) I standardformen $f(x)=a(x-s)^2+d$ er d maksimumsverdien (hvis a er negativ) og den er oppgitt: $d=100$. Fordi P og Q har samme y-koordinat må symmetriaksen $x=s$ gå midt mellom x-verdiene, dvs. $s=10$. Altså er $f(x)=a(x-10)^2+100$. Fordi Q ligger på grafen til $f(x)$ vil $f(12)=90$, dvs $a(12-10)^2+100=90$, dvs $a=-2{,}5$. Dette gir $\underline{\underline{f(x)=-2{,}5(x-10)^2+100}}$.

b) Samme argumentasjon som for $f(x)$ gir $g(x)=a(x-10)^2+d$. Fra $g(12)=90$ får vi nå $a(12-10)^2+d=90$, dvs. $a=\frac{90-d}{4}$ og dermed $g(x)=\frac{90-d}{4}(x-10)^2+d$.

c) $g(x)$ har et maksimumspunkt for $x=10$ med maksimumsverdi d hvis $\frac{90-d}{4}\leqslant 0$, dvs. $\underline{\underline{d\geqslant 90}}$.

Oppgave 9

Standardformen for en ellipselikning (med a og b positive tall) er

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Her er punktet $(x_0\,,\,y_0)$ sentrum av ellipsen, a er horisontal halvakse, b er vertikal halvakse. Av grafen finner vi sentrum $(x_0\,,\,y_0)=(14\,,\,12)$. Horisontal halvakse er horisontal avstand fra sentrum ut til ellipsen, dvs. $a=14-4=10$. Vertikal halvakse er vertikal avstanden fra sentrum ut til ellipsen, dvs. $b=12-4=8$. Dermed er ellipselikningen

$$\underline{\underline{\frac{(x-14)^2}{100}+\frac{(y-12)^2}{64}=1}}$$

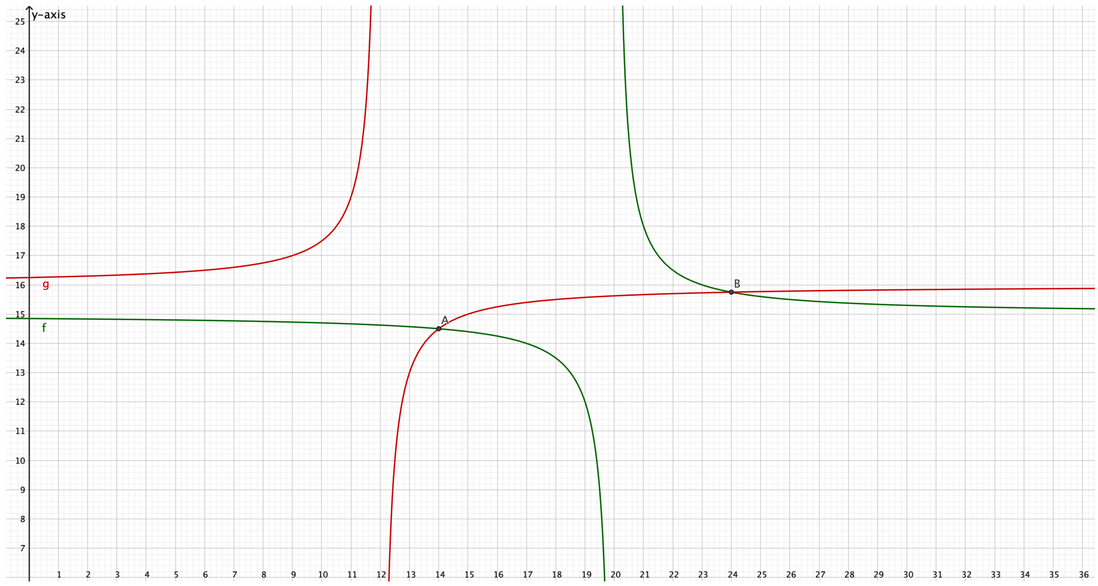
Oppgave 10

a) Standardformen for en hyperbelfunksjon er $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$. Vertikal asymptote er $x=b$ og horisontal asymptote er $y=c$. Punktet $S=(b\,,\,c)$ er symmetripunktet til hyperbelen. Det ser ut til å være $(20\,,\,15)$. Hvis vi trekker linjen l gjennom punktene $(17\,,\,14)$ og $(23\,,\,16)$ på grafen og linjen l' gjennom punktene $(19\,,\,12)$ og $(21\,,\,18)$ på grafen ser vi at skjæringspunktet mellom l og l' er S og alle de fire punktene ligger like langt fra S. Altså er $S=(20\,,\,15)$. Dermed er $f(x)=15+\frac{a}{x-20}$. For å bestemme a bruker vi (f. eks.) likningen $f(21)=18$, dvs. $15+\frac{a}{21-20}=18$ som gir $a=3$ så $\underline{\underline{f(x)=15+\frac{3}{x-20}}}$.

b) For å finne skjæringspunktene finner vi først de x-verdiene som gir samme y-verdi i de to funksjonene, dvs. vi løser likningen $f(x)=g(x)$:

$$\begin{aligned}
15+\frac{3}{x-20}&=16-\frac{3}{x-12} && \text{flytter alt over på en side:}\\
15+\frac{3}{x-20}-16+\frac{3}{x-12}&=0 && \text{og utvider brøkene:}\\
\frac{-(x-20)(x-12)+3(x-12)+3(x-20)}{(x-20)(x-12)}&=0 && \text{løser opp:}\\
\frac{-x^2+32x-240+3x-36+3x-60}{(x-20)(x-12)}&=0 && \text{trekker sammen:}\\
\frac{-x^2+38x-336}{(x-20)(x-12)}&=0
\end{aligned}$$

For at en brøk skal være 0 må telleren være lik 0 og nevneren ulik 0. Vi løser derfor $-x^2+38x-336=0$, dvs. $x^2-38x=-336$. Fullfører kvadratet: $(x-19)^2=19^2-336=25$ som gir $x=19\pm5$, dvs. $\underline{x=14}$ eller $\underline{x=24}$ (som ikke er nullpunkter i nevneren). Så regner vi ut y-verdiene: $f(14)=15+\frac{3}{14-20}=14{,}5$ (som er lik $g(14)$) og $f(24)=15+\frac{3}{24-20}=15{,}75$ (som er lik $g(24)$). Skjæringspunktene mellom hyperblene er dermed $\underline{\underline{(14\,,\,14{,}5)}}$ og $\underline{\underline{(24\,,\,15{,}75)}}$. Se figur 2.



Figur 2: Hyperbler

Oppgave 11

a) Vi setter $y = \sqrt{x-1} + 3$ og løser for x. Vi trekker først fra 3 på begge sider (b.s.): $y - 3 = \sqrt{x-1}$ og opphøyer b.s. i andre: $(y-3)^2 = x - 1$. Legger til 1 på b.s: $x = (y-3)^2 + 1$ og bytter variabeler som gir $\underline{\underline{g(x) = (x-3)^2 + 1}}$. Vi har $V_g = D_f = \underline{\underline{[1\,,26]}}$ og $D_g = V_f$. Fordi $f(x)$ er en voksende funksjon er minimumsverdien $f(1) = \sqrt{1-1} + 3 = 3$ mens maksimumsverdien er $f(26) = \sqrt{26-1} + 3 = 8$. Ved skjæringssetningen vil alle verdier mellom 3 og 8 være i verdimengden til $f(x)$ så $\underline{\underline{D_g = [3\,,8]}}$.

b) Vi setter $y = e^{-0{,}1x+2} + 5$ og løser for x. Vi trekker først fra 5 på b.s: $y - 5 = e^{-0{,}1x+2}$. Setter så b.s. inn i $\ln(-)$ som gir $\ln(y-5) = -0{,}1x + 2$. Trekker fra 2 på b.s: $\ln(y-5) - 2 = -0{,}1x$. Multiplisere med -10 på b.s: $20 - 10\ln(y-5) = x$ og bytter variabeler som gir $\underline{\underline{g(x) = 20 - 10\ln(x-5)}}$. Vi har $V_g = D_f = \underline{\underline{[10\,, \rightarrow\rangle}}$ og $D_g = V_f$.

Fordi $f(x)$ er en avtagende funksjon er maksimumsverdien $f(10) = e^{-0{,}1\cdot 10+2} + 5 = e + 5$ mens $f(x)$ avtar mot 5 når x vokser uten grenser (fordi $e^{-0{,}1x+2} = \frac{e^2}{e^{0{,}1x}}$ og nevneren vokser uten grenser), uten å være lik 5 for noen x. Ved skjæringssetningen vil alle verdier mellom $e + 5$ og 5 bortsett fra 5 selv være i verdimengden til $f(x)$ så $\underline{\underline{D_g = \langle 5\,, e+5]}}$.