Første fagoppgave i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer
4. mars – 11. mars 2022

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) $\ln(x) = \frac{a}{5} = 0{,}2a$ innsatt i e^x gir $\underline{\underline{x = e^{0{,}2a}}}$

b) $e^x = 3(a-1)$ innsatt i $\ln(x)$ gir $\underline{\underline{x = \ln(a-1) + \ln(3) \text{ for } a > 1 \text{ og ingen løsning for } a \leqslant 1}}$

c) Felles brøk: $\frac{a+(x-3)(2-5a)}{x-3} = 0$ dvs $\frac{(2-5a)x+16a-6}{x-3} = 0$ dvs $(2-5a)x + 16a - 6 = 0$, dvs $\underline{\underline{x = \frac{16a-6}{5a-2} \text{ for } a \neq 0{,}4 \text{ og ingen løsning for } a = 0{,}4}}$

d) $x^4 = \frac{1}{-a}$ dvs $\underline{\underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{-a}} \text{ for } a < 0 \text{ og ingen løsning for } a \geqslant 0}}$

Oppgave 2

a) $\ln(x-a) \leqslant 5$ innsatt i strengt voksende e^x gir $0 < x - a \leqslant e^5$, dvs $\underline{\underline{a < x \leqslant a + e^5}}$

b) Faktorisering gir $(a+1)x \geqslant 1$. Når vi deler begge sider med $a+1$ må vi passe på fortegnet: $\underline{\underline{x \geqslant \frac{1}{a+1} \text{ for } a > -1}}$, $\underline{\underline{x \leqslant \frac{1}{a+1} \text{ for } a < -1}}$ og $\underline{\underline{\text{ingen løsning for } a = -1}}$

c) Felles brøk $\frac{x-a+2(x-3)}{x-3} \geqslant 0$ dvs $\frac{3x-a-6}{x-3} \geqslant 0$. Nevneren er voksende med nullpunkt $x = 3$, telleren er også voksende med nullpunkt $x = \frac{a+6}{3}$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema. Det er tre tilfeller.

i) $\frac{a+6}{3} < 3$, dvs $a < 3$: Da er løsningene til ulikheten gitt ved $\underline{\underline{x < \frac{a+6}{3} \text{ eller } x > 3}}$.

ii) $\frac{a+6}{3} > 3$, dvs $a > 3$: Da er løsningene til ulikheten gitt ved $\underline{\underline{x < 3 \text{ eller } x > \frac{a+6}{3}}}$.

iii) $\frac{a+6}{3} = 3$, dvs $a = 3$: Da er løsningene til ulikheten $\underline{\underline{\text{alle } x \neq 3}}$.

d) $e^{x-a} \leqslant a$ har ingen løsninger for $a \leqslant 0$. For $a > 0$ setter vi begge side inn i strengt voksende $\ln(x)$ og får ulikheten $x - a \leqslant \ln(a)$, dvs $\underline{\underline{x \leqslant a + \ln(a)}}$

Oppgave 3

(a) Nåverdien er

$$-60 - \frac{60}{1{,}15^2} + \frac{80}{1{,}15^8} + \frac{80}{1{,}15^9} + \frac{80}{1{,}15^{10}} = \underline{\underline{-36{,}70}}$$

(b) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 7 år er

$$-60 \cdot 1{,}15^7 - 60 \cdot 1{,}15^5 + \frac{80}{1{,}15} + \frac{80}{1{,}15^2} + \frac{80}{1{,}15^3} = \underline{\underline{-97{,}62}}$$

Merk at dette er det samme som nåverdisummen multiplisert med vekstfaktoren for 7 år: $-36{,}70 \cdot 1{,}15^7 = -97{,}62$.

(c) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 7 år er $-97{,}62$ så hvis Kåre legger til en betaling av $\underline{\underline{97{,}62 \text{ om } 7 \text{ år}}}$ vil fremtidsverdien om 7 år av den nye betalingsstrømmen være 0. Det betyr at internrenten til den nye betalingsstrømmen er 15% fordi nåverdien til den nye betalingsstrømmen er $\frac{0}{1{,}15^7} = 0$.

[1] Eksamenskode MET11804

Oppgave 4

(a) Nåverdien er $\frac{60\,\text{mill}}{1{,}09^7} = \underline{\underline{32{,}82}}$ millioner.

(b) Nåverdien 32,82 millioner er hva som må settes på konto i dag for at balansen skal være 60 millioner om 7 år hvis renten er 9%.

(c) Nåverdien av 60 millioner om 6 år med rente r er $\frac{60\,\text{mill}}{(1+r)^6}$. Vi får likningen $\frac{60\,\text{mill}}{1{,}09^7} = \frac{60\,\text{mill}}{(1+r)^6}$. Dette gir $(1+r)^6 = 1{,}09^7$, dvs $1+r = (1{,}09^7)^{\frac{1}{6}}$, dvs $r = 1{,}09^{\frac{7}{6}} - 1 = \underline{\underline{10{,}58\%}}$.

(d) Se utregningen i (c).

Oppgave 5

Polynomet $g(x) = (x+2)(x-(2-\sqrt{5}))(x-(2+\sqrt{5})) = (x-2)(x^2-4x-1) = x^3-2x^2-9x-2$ har de oppgitte nullpunktene, men konstantleddet er -2. Multipliserer derfor $g(x)$ med -2 og får $\underline{\underline{f(x) = -2x^3+4x^2+18x+4}}$ som har de samme røttene.

Oppgave 6

Andregradslikningen har løsninger akkurat hvis tallet under roten i abc-formelen er større eller lik 0, dvs $(2a)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 \geqslant 0$ dvs $a^2 \geqslant 5$ dvs $\underline{\underline{|a| \geqslant \sqrt{5}}}$

Oppgave 7

Vi utfører polynomdivisjonen og får resten $a^2-6a+13$ som er oppgitt til å være 5. Løser altså likningen $a^2-6a+13 = 5$ og får $\underline{\underline{a = 2 \text{ eller } a = 4}}$.

Oppgave 8

Vi lar $x = t$ være det midterste nullpunktet. Da er de to andre nullpunktene $x = t-1$ og $x = t+1$. Det gir tredjegradspolynomet med disse røttene gitt som
$(x-(t+1))(x-(t-1))(x-t) = (x^2-2tx+t^2-1)(x-t) = \underline{\underline{x^3-3tx^2+(3t^2-1)x-t(t^2-1)}}$.

Oppgave 9

a) I standardformen $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ er $x = b = 6$ den vertikale asymptoten mens $y = c = 10{,}5$ er den horisontale asymptoten. Dermed er $f(x) = 10{,}5 + \frac{a}{x-6}$. Vi har dessuten at $f(7) = 10{,}5 + \frac{a}{7-6} = 10$ dvs $a = -0{,}5$ og $\underline{\underline{f(x) = 10{,}5 - \frac{0{,}5}{x-6}}}$.

b) Standardformen for likningen til en «rett» ellipse er

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

der $(x_0\,, y_0)$ er sentrum av ellipsen, a er horisontal halvakse og b er vertikal halvakse. Symmetrilinjene går gjennom sentrum av ellipsen så $(x_0\,, y_0) = (5\,, 4)$ og likningen er altså

$$\frac{(x-5)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1$$

Fordi $(9\,, 4)$ ligger på E får vi likningen

$$\frac{(9-5)^2}{a^2} + \frac{(4-4)^2}{b^2} = 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{16}{a^2} = 1$$

dvs $a = 4$. Tilsvarende får vi fra $(5\,,7)$ likningen

$$\frac{(5-5)^2}{a^2} + \frac{(7-4)^2}{b^2} = 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{9}{b^2} = 1$$

dvs $b = 3$. Altså

$$\underline{\underline{\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1}}$$

Oppgave 10

Standardformen $f(x) = a(x-s)^2 + d$ har $x = s$ som symmetrilinje. Vi ser at $x = 7$ og $x = 17$ ligger like langt fra symmetrilinjen siden $f(7) = f(17)$. Altså er $s = \frac{7+17}{2} = 12$. Vi har også at $d = 15$ så $f(x) = a(x-12)^2 + 15$. Fra $f(17) = 10$ får vi likningen $a(17-12)^2 + 15 = 10$ dvs $25a = -5$ dvs $a = -0{,}2$ og $\underline{f(x) = -0{,}2(x-12)^2 + 15}$. Da får vi

a) $f(9) = -0{,}2(9-12)^2 + 15 = -1{,}8 + 15 = \underline{\underline{13{,}2}}$.

b) Vi løser likningen $-0{,}2(x-12)^2 + 15 = 0$ som gir $(x-12)^2 = (-5)(-15) = 75$ dvs $\underline{\underline{x = 12 \pm 5\sqrt{3}}}$.

Oppgave 11

a) Vi setter $y = f(x)$ og løser for x. Dvs $y = -\frac{x}{3} + 7$ som gir $x = -3y + 21$. Da har den omvendte funksjonen funksjonsuttrykket $g(x) = \underline{\underline{-3x + 21}}$. Her er definisjonsmengden D_g som alltid lik verdimengden til $f(x)$. Fordi $f(x)$ er en avtagende funksjon er største verdi $f(0) = 7$ og den minste verdien er $f(21) = 0$. Så $D_g = V_f = \underline{\underline{[0\,,7]}}$. Endelig er verdimengden til $g(x)$ som alltid lik definisjonsmengden til $f(x)$, dvs $V_g = \underline{\underline{[0\,,21]}}$.

b) Vi setter $y = \ln(x+2) - 5$ og løser for x. Vi legger til 5 på begge sider. Det gir $\ln(x+2) = y + 5$. Vi setter begge sider inn i funksjonen e^x og får

$$e^{\ln(x+2)} = e^{y+5} \quad \text{dvs} \quad x + 2 = e^{y+5} \quad \text{dvs} \quad x = e^{y+5} - 2$$

Dermed har den omvendte funksjonen funksjonsuttrykket

$$g(x) = \underline{\underline{e^{x+5} - 2}}$$

Fordi $f(x)$ er en strengt voksende funksjon som går mot $-\infty$ når x nærmer seg -2 ovenfra og $f(x)$ vokser uten grenser når x går mot $+\infty$ er $V_f =$ hele tallinjen og dermed er $D_g =$ $\underline{\underline{\text{hele tallinjen}}}$. Dessuten er $V_g = D_f = \underline{\underline{\langle -2\,,\infty\rangle}}$.