Første fagoppgave i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer
14. okt. – 21. okt. 2022

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = 25\,000 \cdot 1{,}004^{38}$, antall ledd $n = (276-36):2 = 120$ og multiplikasjonsfaktor $k = 1{,}004^2$. Da er summen

$$25\,000 \cdot 1{,}004^{38} \cdot \frac{1{,}004^{240}-1}{1{,}004^2-1} = \underline{\underline{5\,831\,740{,}85}}$$

b) F. eks. kan summen være saldo (fremtidsverdi) om 23 år hvis det er 4,8% nominell rente, månedlig forrentning (med månedlig vekstfaktor $1+\frac{4{,}8\%}{12} = 1{,}004$), innskudd 25 000 hver andre måned med det første innskuddet i dag og det siste om 19 år og 10 måneder (altså 120 innskudd) som så blir stående i 3 år og 2 måneder etter siste innskudd.

Oppgave 2

a) Årlig vekstfaktor er e^r. Nåverdien av kontantstrømmen er summen av nåverdiene av betalingene, dvs

$$\underline{\underline{\frac{A}{e^{4r}} + \frac{B}{e^{6r}} + \frac{C}{e^{9r}}}}$$

Hvis $A = 20$, $B = 30$, $C = 50$ og $r = 10\%$ gir dette $\frac{20}{e^{0,4}} + \frac{30}{e^{0,6}} + \frac{50}{e^{0,9}} = \underline{\underline{50{,}20}}$

b) Fremtidsverdien av kontantstrømmen etter 7 år er summen av fremtidsverdiene av betalingene, dvs

$$\underline{\underline{Ae^{3r} + Be^r + \frac{C}{e^{2r}}}}$$

som også er fremtidsverdien om 7 år av nåverdien til kontantstrømmen. Innsatt tallene får vi derfor $50{,}20 \cdot e^{0,7} = \underline{\underline{101{,}09}}$.

c) i) Vi får likningen

$$\frac{20}{e^{4r}} = \frac{30}{e^{6r}} \quad \text{dvs} \quad \frac{e^{6r}}{e^{4r}} = \frac{30}{20} \quad \text{dvs} \quad e^{2r} = \frac{3}{2}$$

Setter venstre og høyresiden inn i $\ln(-)$ og får $2r = \ln 3 - \ln 2$, dvs $\underline{\underline{r = (\ln 3 - \ln 2) : 2 = 20{,}27\%}}$.

ii) Vi får ulikheten

$$\frac{50}{e^{9r}} > \frac{30}{e^{6r}} \quad \text{dvs} \quad \frac{50}{30} > \frac{e^{9r}}{e^{6r}} \quad \text{dvs} \quad e^{3r} < \frac{5}{3}$$

Setter venstre og høyresiden inn i $\ln(-)$. Fordi $\ln(x)$ er en strengt voksende funksjon er den nye ulikheten ekvivalent: $3r < \ln 5 - \ln 3$, dvs $\underline{\underline{r < (\ln 5 - \ln 3) : 3 = 17{,}03\%}}$

d) Vi får ulikhetene

i) $\frac{30}{e^{6r}} > \frac{20}{e^{4r}}$, dvs $e^{2r} < 3/2$, dvs $r < (\ln 3 - \ln 2)/2 = 20{,}27\%$

ii) $\frac{30}{e^{6r}} > \frac{50}{e^{9r}}$, dvs $e^{3r} > 5/3$, dvs $r > (\ln 5 - \ln 3)/3 = 17{,}03\%$

iii) $\frac{20}{e^{4r}} < \frac{50}{e^{9r}}$, dvs $e^{5r} < 5/2$, dvs $r < (\ln 5 - \ln 2)/5 = 18{,}33\%$

Altså er $\underline{\underline{17{,}03\% < r < 18{,}33\%}}$.

[1] Eksamenskode MET11804

Oppgave 3

a) Vi har $(x-(-2+\sqrt{7}))(x-(-2-\sqrt{7})) = x^2+4x-3$. Altså har andregradslikningen $\underline{\underline{x^2+4x-3=0}}$ de oppgitte røttene.

b) Vi har $(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) = x^2-10$ og $(x-k)(x^2-10) = x^3-kx^2-10x+10k$. Altså har tredjegradslikningen $\underline{\underline{x^3-kx^2-10x+10k=0}}$ de oppgitte røttene.

Oppgave 4

a) Vi tar kvadratet på hver side av likningen og får $4x+9 = x^2+2x+1$, dvs $x^2-2x-8=0$ som gir $x=-2$ eller $x=4$.

$\underline{x=-2}$: Venstresiden blir $=\sqrt{4\cdot(-2)+9} = 1$ mens høyresiden blir $-2+1=-1$, altså ingen løsning.

$\underline{x=4}$: Venstresiden blir $=\sqrt{4\cdot 4+9} = 5$ og høyresiden blir også $4+1=5$, altså løsning.

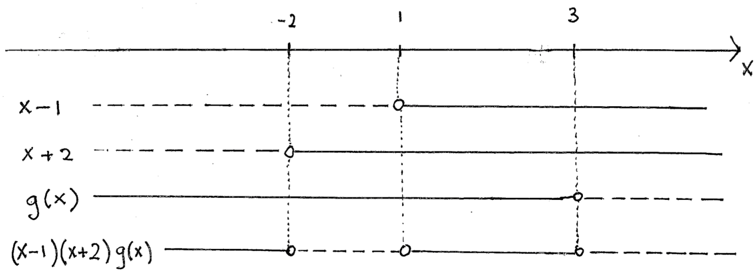
Konklusjon: $\underline{\underline{x=4}}$ er eneste løsning.

b) Vi gjør det samme med denne likningen og får $x^2+2(t-2)x+t^2-9=0$. Denne andregradslikningen har ingen løsninger hvis og bare hvis $[2(t-2)]^2-4\cdot 1\cdot(t^2-9)<0$, dvs $4t^2-16t+16-4t^2+36<0$, dvs $t>3{,}25$. Da kan heller ikke den opprinnelig likningen ha noen løsninger.

c) Setter $u=x^2$ og får andregradslikningen $u^2+6u=k$, dvs $(u+3)^2=k+9$ som har løsninger $u=-3\pm\sqrt{k+9}$ akkurat når $k\geqslant -9$. Substituerer tilbake og får $x^2=-3\pm\sqrt{k+9}$. Denne likningen har løsninger akkurat når $-3\pm\sqrt{k+9}\geqslant 0$ (og $k\geqslant -9$), dvs $\pm\sqrt{k+9}\geqslant 3$. Eneste mulighet er $\sqrt{k+9}\geqslant 3$, dvs $\underline{\underline{k\geqslant 0}}$.

Oppgave 5

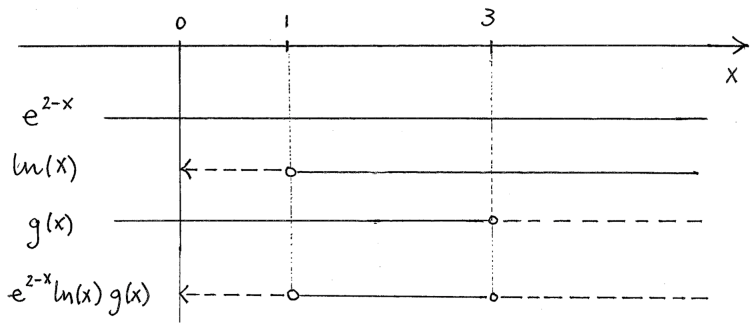
a) Siden vi har 0 på høyresiden og ferdig faktorisert venstreside kan vi bruke fortegnsskjema med en gang:



Figur 1: Fortegnsskjema

Vi får $\underline{\underline{x\leqslant -2 \text{ eller } 1\leqslant x\leqslant 3}}$ som også kan skrives slik: $\underline{\underline{x\in\langle\leftarrow, -2] \text{ eller } x\in[1,3]}}$.

b) Merk at ulikheten bare er definert for $x>0$. Igjen har vi 0 på høyresiden og ferdig faktorisert venstreside og kan vi bruke fortegnsskjema direkte (e^{2-x} er større enn 0 for alle x):



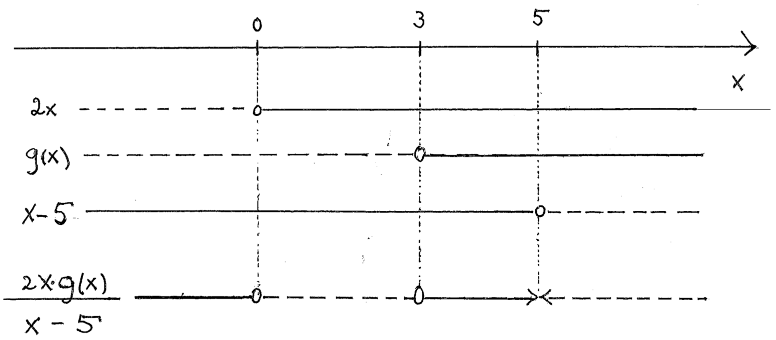
Figur 2: Fortegnsskjema

Det gir $0 < x < 1$ eller $x > 3$ som også kan skrives slik: $x \in \langle 0, 1\rangle$ eller $x \in \langle 3, \rightarrow\rangle$.

c) Her må vi først samle leddene på venstresiden og lage en felles brøk:

$$\frac{(3x-5)g(x)}{x-5} - g(x) \leqslant 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{(3x-5)g(x)-(x-5)g(x)}{x-5} \leqslant 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{2x \cdot g(x)}{x-5} \leqslant 0$$

Da bruker vi fortegnsskjema:



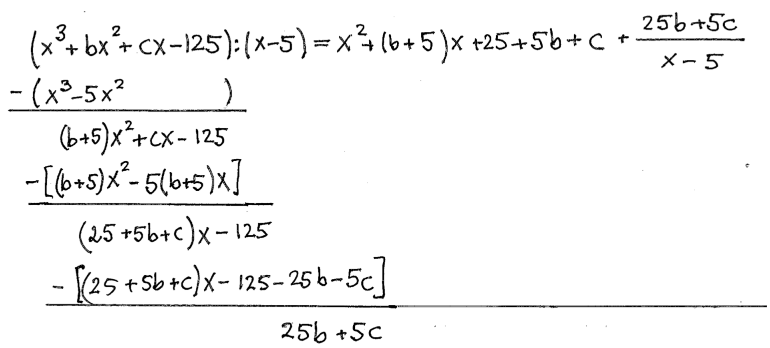
Figur 3: Fortegnsskjema

Vi får $0 \leqslant x \leqslant 3$ eller $x > 5$ som også kan skrives slik: $x \in [0, 3]$ eller $x \in \langle 5, \rightarrow\rangle$.

d) Ulikheten er på standardform og telleren er alltid positiv (minst 4). Nevneren, og dermed brøken, er positiv for $x > \ln(10)/2$ som også kan skrives slik: $x \in \langle \ln(10)/2, \rightarrow\rangle$.

Oppgave 6

a) Vi utfører polynomdivisjonen $f(x) : g(x)$ på vanlig måte og får



Figur 4: Polynomdivisjon

$$\text{Altså} \quad (x^3 + bx^2 + cx - 125) : (x-5) = x^2 + (b+5)x + 25 + 5b + c + \frac{25b+5c)}{x-5}$$

b) Resten i polynomdivisjonen er lik $25b + 5c$ og $g(x)$ er en faktor i $f(x)$ akkurat når resten er lik 0, dvs $5(5b + c) = 0$, dvs akkurat når $5b + c = 0$.

Oppgave 7

a) Siden $f(75) = f(105)$ er symmetriaksen $x = 90$ som gir $s = 90$ is standardformen $f(x) = a(x-s)^2 + d$ og minimimumsverdien gir $d = -3{,}5$, dvs $f(x) = a(x-90)^2 - 3{,}5$. Fra $f(105) = 4$ får vi likningen $a(105-90)^2 - 3{,}5 = 4$, dvs $225a = 7{,}5$, dvs $a = \frac{1}{30}$ og $f(x) = \frac{1}{30}(x-90)^2 - 3{,}5$.

b) I standardformen $g(x) = c + \frac{a}{x-b}$ har vi fått oppgitt at $b = 0$ og $c = 100$, altså er $g(x) = 100 + \frac{a}{x}$. Fra $g(5) = 98$ får vi dermed likningen $100 + \frac{a}{5} = 98$ som gir $a = -10$, dvs $\underline{\underline{g(x) = 100 - \frac{10}{x}}}$.

Oppgave 8

a) De fire punktene er hjørnene i et kvadrat med sidelengde 4 og sentrum $(8, 6)$ som også må være sentrum til sirkelen. Radius til sirkelen er dermed $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Altså er sirkellikningen på standardform $\underline{\underline{(x-8)^2 + (y-6)^2 = 8}}$.

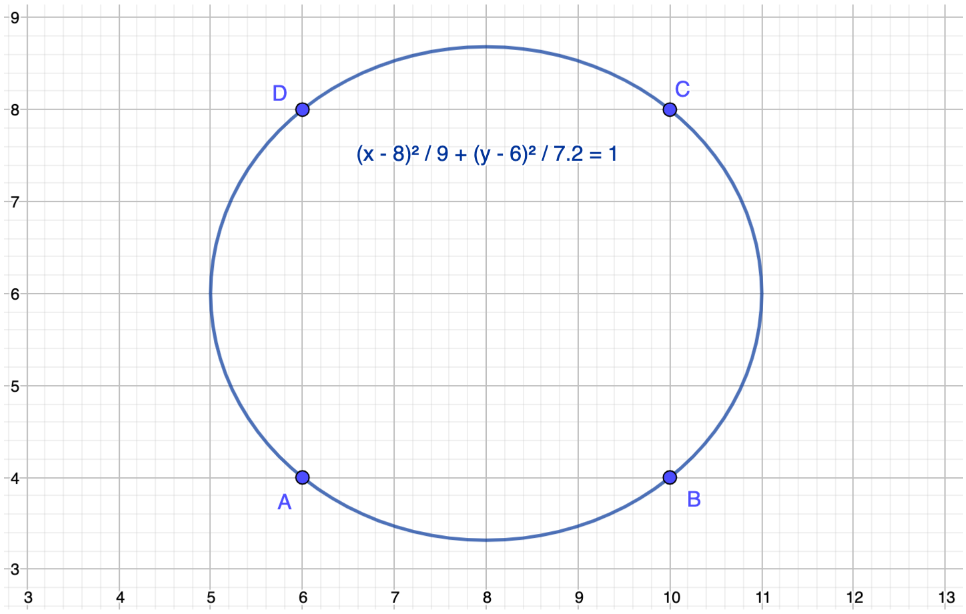
b) Sentrum for ellipsen må også være $(8, 6)$ som gir standardformen

$$\frac{(x-8)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

Fordi C skal være et punkt på ellipsen må

$$\frac{(10-8)^2}{a^2} + \frac{(8-6)^2}{b^2} = 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \qquad (**)$$

Kravet til halvaksene er at $a > b$. Hvis vi prøver med $a = 3$ får $\frac{4}{9} + \frac{4}{b^2} = 1$ som vi løser og får $b = \frac{6}{\sqrt{5}}$ som er mindre enn 3. Altså er $\underline{\underline{\frac{(x-8)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{7{,}2} = 1}}$ et eksempel på en slik ellipselikning:



Figur 5: Ellipse

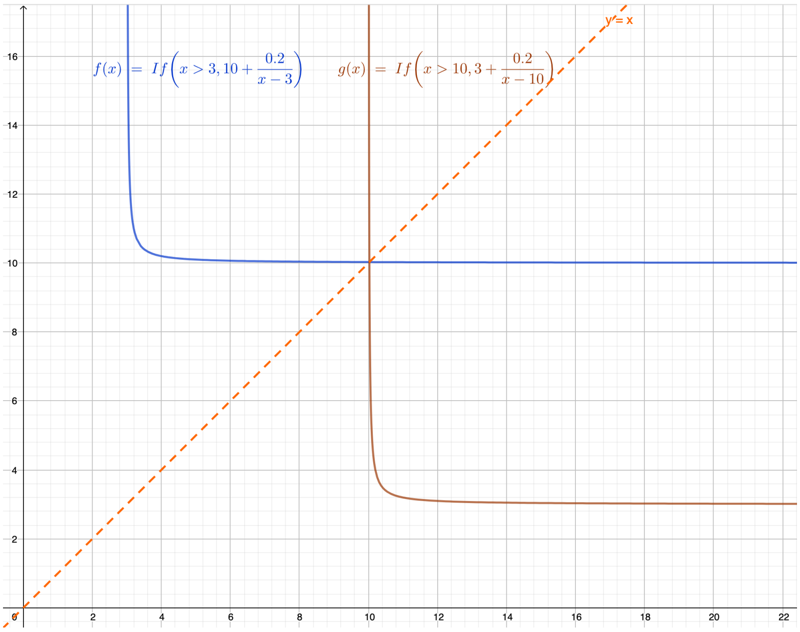
c) Hvis origo $(0, 0)$ skal være et punkt på ellipsen må $x = 0 = y$ passe i ellipselikningen $(*)$, dvs

$$\frac{(0-8)^2}{a^2} + \frac{(0-6)^2}{b^2} = 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \qquad (***)$$

Da er $(**)$ og $(***)$ to likninger for a og for b. Men de har ingen felles løsninger som kan vises på flere måter. F. eks, hvis vi multipliserer begge sider av $(**)$ med 9 får vi $\frac{36}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 9$. Hvis vi trekker venstresiden av denne likningen fra venstresiden i $(***)$ og tilsvarende med høyresiden får vi likningen $\frac{28}{a^2} = -8$ som ikke har noen løsninger siden venstresiden alltid er positiv. Altså finnes det heller ingen ellipse som $(*)$ som går gjennom origo.

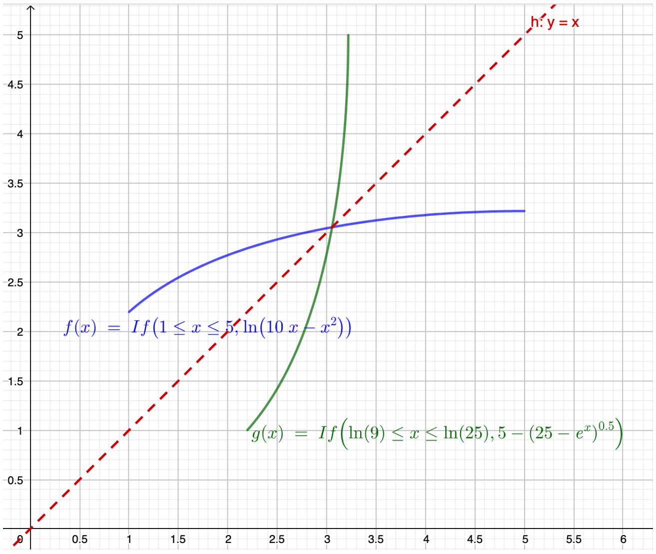
Oppgave 9

a) Vi setter $y = 10 + \frac{0{,}2}{x-3}$ og løser for x. Vi subtraherer 10 på begge sider og får $y - 10 = \frac{0{,}2}{x-3}$. Multiplikasjon med $x-3$ på begge sider gir $(x-3)(y-10) = 0{,}2$ og divisjon med $y-10$ på begge sider gir $x - 3 = \frac{0{,}2}{y-10}$, dvs $x = 3 + \frac{0{,}2}{y-10}$. Bytter variabler og får $\underline{\underline{g(x) = 3 + \frac{0{,}2}{x-10}}}$. Generelt har vi $D_g = V_f$. Vi ser at $f(x)$ har en vertikal asymptote $x = 3$ og at $f(x)$ vokser uten grenser når x nærmer seg 3 ovenfra. På den annen side vil $f(x)$ nærme seg 10 ovenfra når x vokser uten grenser. Dette gir $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 10, \infty\rangle}}$. Dessuten er $V_g = D_f = \underline{\underline{\langle 3, \infty\rangle}}$.



Figur 6: Omvendte funksjoner

b) Vi setter $y = \ln(10x - x^2)$ og løser for x. Vi setter begge sider inn i $e^{(-)}$ og får $e^y = 10x - x^2$. Multiplikasjon med -1 på begge sider gir $x^2 - 10x = -e^y$. Fullfører kvadratet på venstresiden og får $(x-5)^2 = 25 - e^y$. De to mulighetene er $x = 5 \pm \sqrt{25 - e^y}$. Fordi $f(1) = \ln(9)$ vil vi ha $1 = 5 \pm \sqrt{25 - e^{\ln 9}} = 5 \pm 4$. Dette stemmer bare for minus. Vi kan også få dette mer direkte ved at $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = -(x-5)$ fordi $x \leqslant 5$. Altså er $\underline{\underline{g(x) = 5 - \sqrt{25 - e^x}}}$ (etter bytte av variabler). Generelt har vi $D_g = V_f$. Vi ser at $10x - x^2$ er voksende for x i D_f og fordi $\ln(x)$ er en voksende funksjon er $f(x)$ også voksende. Dermed er minster funksjonsverdi $f(1) = \ln(9)$ mens største funksjonsverdi er $f(5) = \ln(25)$. Dette gir $D_g = V_f = \underline{\underline{[\ln(9), \ln(25)]}}$. Dessuten er $V_g = D_f = \underline{\underline{[1, 5]}}$.



Figur 7: Omvendte funksjoner

Oppgave 10

Vi bruker definisjonen for en strengt voksende funksjon: For alle $x_1 < x_2$ skal $f(x_1) < f(x_2)$. Anta derfor $x_1 < x_2$. Da er $x_2 - x_1 > 0$ og ved det oppgitte faktum er da $e^{x_2 - x_1} > 1$. Ved å multiplisere begge sider med det positive tallet e^{x_1} får vi $f(x_2) = e^{x_2} > e^{x_1} = f(x_1)$ som var det som skulle vises.